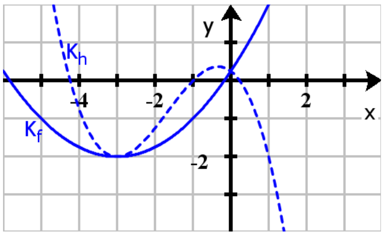
Berühren und senkrecht schneiden (Aufgaben)

Aufgabe 1



Das nebenstehende Schaubild zeigt die Graphen K_f und K_h der Funktionen $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$ und $h(x)=-\frac{1}{4}\left(x^3+5x^2+3x-1\right)$. Zeigen Sie, dass K_f und K_h zwei gemeinsame Punkte haben und nur einer von ihnen ein Berührpunkt ist.

Lösung:

Bestimme die Schnittpunkte von K_f und K_h:

Setze $f(x)=h(x) \Rightarrow f(x)-h(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x=0 \Rightarrow \frac{1}{4}x\left(x^2+6x+9\right)=0$

nach dem Satz vom Nullprodukt ist $x=0 \vee x^2+6x+9=0$

$x^2+6x+9 = 0$

Setze $a=1,\ b=6,\ c=9$ in die Lösungsformel ein:

$$
\begin{aligned}
x_{2,3} &= \frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}\\
&= \frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{2}\\
&= \frac{-6\pm\sqrt{0}}{2}\\
&= \frac{-6\pm0}{2}\\
x_2 &= -3\\
x_3 &= -3
\end{aligned}
$$

damit haben K_f und K_h zwei gemeinsame Punkte.

Zeige, dass nur einer von beiden ein Berührpunkt ist:

Bilde von beiden Funktionen die 1. Ableitung:

$f'(x)=\frac{1}{2}(x+3)$ und $h'(x)=-\frac{1}{4}\left(3x^2+10x+3\right)$

Setze $x=-3$ und $x=0$ in $f'(x)$ und $h'(x)$ ein:

$\left.\begin{matrix} f'(-3)=0\\ h'(-3)=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Beührpunkt an der Stelle $x=-3$

$\left.\begin{matrix} f'(0)=\frac{3}{2}\\ h'(0)=-\frac{3}{4}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ kein Beührpunkt an der Stelle $x=0$

Aufgabe 2

Wo berühren sich die Graphen von f und h?

$f(x)=\frac{2}{x^2}$ und $h(x)=-\frac{1}{8}x^2+1$

Lösung:

Suche die Stellen, an denen die Graphen von f und h gemeinsame Punkte haben:

Setze $f(x)=h(x) \Rightarrow 0=h(x)-f(x) \Rightarrow 0=-\frac{1}{8}x^2+1-\frac{2}{x^2}$

Gleichung mit x^2 auf beiden Seiten multiplizieren:

$0=-\frac{1}{8}x^4+x^2-2$ Löse die Gleichung mit Hilfe von Substitution auf:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8}x^4+x^2-2 &= 0 \quad | \cdot 8 \\
-x^4+8x^2-16 &= 0 \quad | \text{ Substitution: } x^2 \rightarrow u \\
-u^2+8u-16 &= 0
\end{aligned}$$

Setze $a=-1$, $b=8$, $c=-16$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
u_{1,2} &= \frac{-8 \pm \sqrt{(8)^2-4\cdot(-1)\cdot(-16)}}{2\cdot(-1)} \\
&= \frac{-8\pm\sqrt{64-64}}{-2} \\
&= \frac{-8\pm\sqrt{0}}{-2} \\
&= \frac{-8\pm 0}{-2} \\
u_1 &= 4 \\
u_2 &= 4
\end{aligned}$$

Rücksubstitution: $u \rightarrow x^2$

$$\begin{aligned}
u_1 \rightarrow \quad x^2 &= 4 \quad | \sqrt{\ } \\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{4} \\
x_{1,2} &= \pm 2 \\
x_1 &= 2 \\
x_2 &= -2 \\
u_2 \rightarrow \quad x^2 &= 4 \quad | \sqrt{\ } \\
x_{3,4} &= \pm\sqrt{4} \\
x_{3,4} &= \pm 2 \\
x_3 &= 2 \\
x_4 &= -2
\end{aligned}$$

Prüfe, ob beide Graphen an $x=-2$ und $x=2$ jeweils die gleiche Steigung haben. Bilde dazu die 1. Ableitung von f und h:

$f'(x)=-\frac{4}{x^3}$ und $h'(x)=-\frac{1}{4}x$

Setze $x_1=-2$ und $x_2=2$ in $f'(x)$ und $h'(x)$ ein:

$$\left.\begin{aligned} f'(-2)&=\frac{1}{2} \\ h'(-2)&=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ Beührpunkt an der Stelle } x_1=-2$$

$$\left.\begin{aligned} f'(2)&=-\frac{1}{2} \\ h'(-2)&=-\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ Beührpunkt an der Stelle } x_2=2$$

Aufgabe 3

Sei K_f der Graph von f und K_h der Graph von h. Zeigen Sie, dass die Kurve K_h für alle $x \in \mathbb{R}$ oberhalb der Kurve K_f liegt (Lage der Kurven zueinander). Es ist $f(x) = \cos(x) + 1$ und $h(x) = x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Wenn K_h oberhalb von K_f liegt, dann dürfen sich K_h und K_f nicht schneiden:

Prüfe auf gemeinsame Kurvenpunkte:

Setze $f(x) = h(x) \Rightarrow \cos(x) + 1 = x^2 + 2 \Rightarrow \cos(x) - x^2 = 1$. Da $\cos(x) \le 1$ für $x \in \mathbb{R}$ ist, kann nur $x = 0$ eine Lösung der Gleichung sein.

Prüfe, ob $x = 0$ Berührpunkte (d.h. keine echten Schnittpunkte) sind:

Bilde von f und h die 1. Ableitung:

$f'(x) = -\sin(x)$ und $h'(x) = 2x$

Setze $x = 0$ in $f'(x)$ und $h'(x)$ ein:

$$\left.\begin{array}{r} f'(0)=0 \\ h'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Berührpunkt an der Stelle } x=0$$

Daraus folgt zusammen mit der Stetigkeit der beiden Funktionen, dass eine der beiden Kurven für alle $x \in \mathbb{R}$ oberhalb der anderen Kurve liegt. Prüfe, ob K_h für alle $x \in \mathbb{R}$ oberhalb der Kurve K_f liegt:

Wähle für die Prüfung eine beliebige Stelle ungleich der Berührstellen: $x = \pi$

$f(\pi) = 0 < 10{,}87 \approx \pi^2 + 2 = h(\pi)$

Somit liegt die Kurve K_h für alle $x \in \mathbb{R}$ oberhalb der Kurve K_f.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Koeffizienten a und c so, dass sich die Kurven von f und h an der Stelle $x = 1$ berühren.

$f(x) = a\,e^{x-1} - x + c \quad (a, c \in \mathbb{R})$ und $h(x) = -\frac{1}{9}(2x^2 - 13x - 7)$

Lösung:

Sei K_f die Kurve von f und K_h die Kurve von h. Wenn sich K_f und K_h an der Stelle $x = 1$ berühren, dann muss gelten:

1. K_f und K_h haben an der Stelle $x = 1$ die gleiche Steigung.
2. K_f und K_h haben an der Stelle $x = 1$ einen gemeinsamen Kurvenpunkt.

Bestimme die Steigung von K_f an der Stelle $x = 1$ mit Hilfe der 1. Ableitung von h:

$h'(x) = -\frac{1}{9}(4x - 13)$, $h'(1) = 1$

Die 1. Ableitung von f ist $f'(x) = a\,e^{x-1} - 1$. Es gilt $f'(1) = 1 \Rightarrow a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$.

Gemeinsamer Kurvenpunkt an der Stelle $x = 1$: $h(1) = 2 \Rightarrow f(1) = 2$:

$f(1) = 2\,e^0 - 1 + c = 2 \Rightarrow 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1$

Damit ist $f(x) = a\,e^{x-1} - x + 1$.