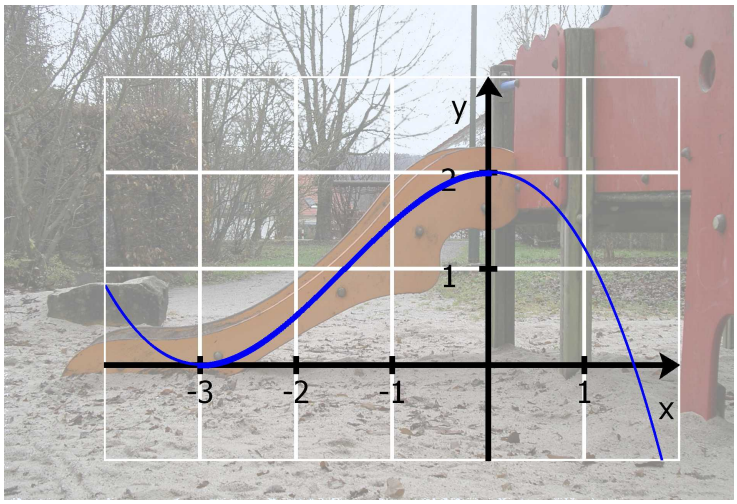
Wendestellen

Wo ist die steilste Stelle der Rutsche?

Gehen wir davon aus, dass sich der Verlauf der Rutschbahn durch die Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{4}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 2$$

im Intervall $[-3;0]$ beschreiben lässt.

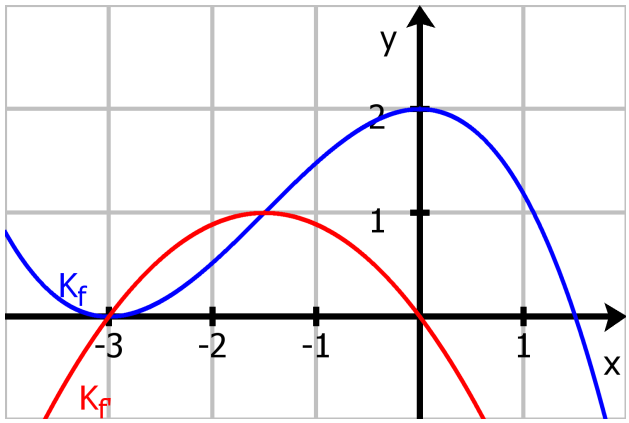


Krümmung einer Kurve

Die Steigung von f nimmt in dem Intervall $[-3;-1{,}5]$ zu. Es wird von einer Linkskrümmung der Kurve gesprochen.

In dem Intervall $[-1{,}5;0]$ nimmt die Steigung der Funktion f ab. Es wird von einer Rechtskrümmung der Kurve gesprochen.

Die Links-/Rechtskrümmung einer Kurve hängt unmittelbar mit der Kurve der Ableitungsfunktion zusammen:



Definition:

Sei K_f der Graph einer Funktion f und f in dem Intervall $[a;b]$ differenzierbar.

K_f heißt im Intervall $[a;b]$ <u>linksgekrümmt</u>, wenn $K_{f'}$ in $[a;b]$ monoton steigend ist.

K_f heißt im Intervall $[a;b]$ <u>rechtsgekrümmt</u>, wenn $K_{f'}$ in $[a;b]$ monoton fallend ist.

Wendestelle

Definition:

Eine Stelle x_0 wird als <u>Wendestelle</u> von K_f bezeichnet, wenn der Graph K_f beim durchlaufen dieser Stelle von einer Links- in eine Rechstkrümmung übergeht, oder umgekehrt.

Der Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ wird <u>Wendepunkt</u> von K_f genannt.

Wie werden die Wendestellen einer Kurve K_f bestimmt?

Untersuche das Monotonieverhalten von $K_{f'}$:

© 2008 Henrik Horstmann

$$f(x) = -\frac{4}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 2 \;\Rightarrow\; f'(x) = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{3}x \;\Rightarrow\; f''(x) = -\frac{8}{9}x - \frac{4}{3}$$

Berechne die Nullstellen der 2. Ableitung:
Setze $f''(x) = 0$:

$$\begin{aligned} -\frac{8}{9}x - \frac{4}{3} &= 0 \quad \Big| +\frac{4}{3} \\ -\frac{8}{9}x &= \frac{4}{3} \quad \Big| \div\left(-\frac{8}{9}\right) \\ x_1 &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$x < -\frac{3}{2}$: $K_{f'}$ ist monoton steigend.

$-\frac{3}{2} < x$: $K_{f'}$ ist monoton fallend.

Das bedeutet, dass die Steigung von $K_{f'}$ an der Stelle $x = -\frac{3}{2}$ einen Vorzeichenwechsel hat. $K_{f'}$ besitzt somit für $x = -\frac{3}{2}$ eine Extremstelle und es muss $f'''\left(-\frac{3}{2}\right) \neq 0$ gelten.

Merke:

Sei K_f der Graph einer Funktion f und f in dem Intervall $[a;b]$ drei mal differenzierbar.

x_0 ist eine Wendestelle von K_f, wenn folgendes gilt:

1. $f''(x_0) = 0$
2. $f'''(x_0) \neq 0$

© 2008 Henrik Horstmann

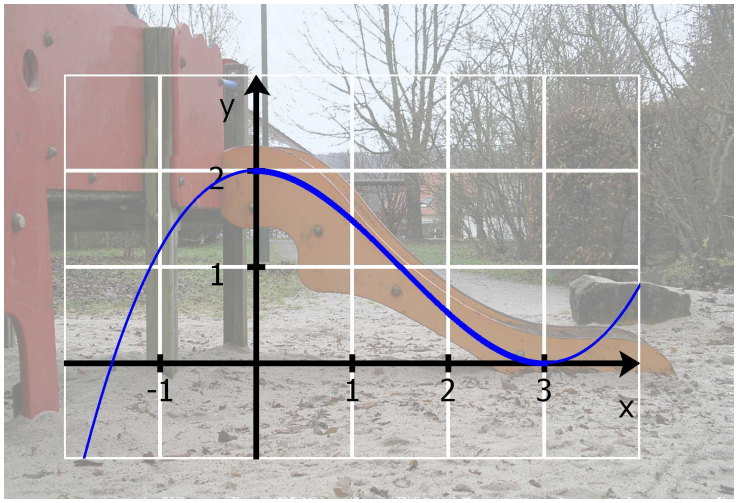
Beispiel

Wo ist die steilste Stelle der Rutsche?

Gehen wir davon aus, dass sich der Verlauf der Rutschbahn durch die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{4}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 2$$

im Intervall $[0;3]$ beschreiben lässt.



Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$f(x) = \frac{4}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 2$$

$$f'(x) = \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{3}x$$

$$f''(x) = \frac{8}{9}x - \frac{4}{3}$$

$$f'''(x) = \frac{8}{9}$$

Berechne die Nullstellen der 2. Ableitung:
Setze $f''(x) = 0$:

$\Rightarrow \; x_1 = \frac{3}{2}$

Untersuche die Stelle $x = \frac{3}{2}$:

$$f'''(3/2) = \frac{8}{9}$$

$f'''(3/2) \neq 0 \;\Rightarrow$ Wendestelle an der Stelle $x = \frac{3}{2}$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 \;\Rightarrow\; W\left(\frac{3}{2} \,\middle|\, 1\right)$$

© 2008 Henrik Horstmann

Wenn die dritte Ableitung Null ist

Untersuche die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{60}x^5 - 2x - \frac{3}{2}$ auf Wendestellen:

Berechne die Nullstellen der 2. Ableitung:
Setze $f''(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x^3 &= 0 \quad \Big| \div \frac{1}{3} \\ x^3 &= 0 \quad \Big| \sqrt[3]{} \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $x = 0$:

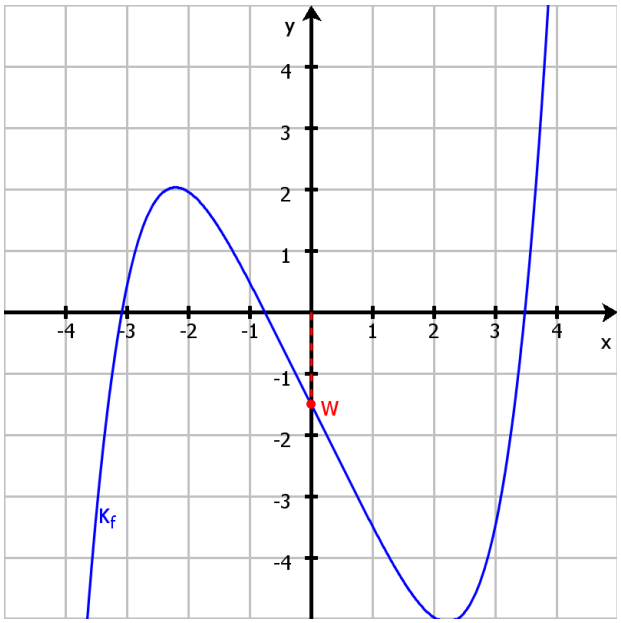
$$f'''(0) = 0$$

Betrachte die 4. und 5. Ableitung:

$$\begin{aligned} f''''(x) &= 2x \\ f'''''(x) &= 2 \\ f'''''(0) &= 2 \end{aligned}$$

$f'''''(0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt an der Stelle $x = 0$

$$f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow W\left(0 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right)$$



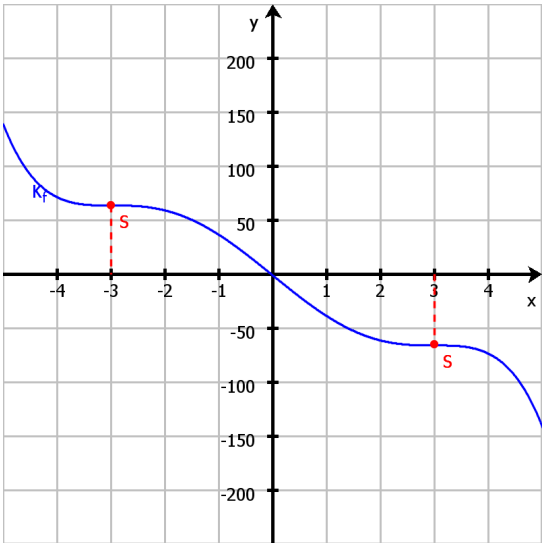
Merke:

Sei $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung. Ist $f''(x_0) = 0, \ \ldots, \ f^{(n-1)}(x_0) = 0$, jedoch $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ und n eine ungerade Zahl, so besitzt f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.

© 2008 Henrik Horstmann

Sattelpunkte

Betrachte folgendes Beispiel: Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion f mit $f(x) = -0{,}1\,x^5 + 3\,x^3 - 40{,}5\,x - 0{,}75$.



Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0{,}1\,x^5 + 3\,x^3 - 40{,}5\,x - 0{,}75 \\ f'(x) &= -0{,}5\,x^4 + 9\,x^2 - 40{,}5 \\ f''(x) &= -2\,x^3 + 18\,x \\ f'''(x) &= -6\,x^2 + 18 \end{aligned}$$

Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $f'(x) = 0$:

$$-0{,}5\,x^4 + 9\,x^2 - 40{,}5 = 0 \quad \Big| \text{ Substitution: } x^2 \to u$$

$$-0{,}5\,u^2 + 9\,u - 40{,}5 = 0$$

setze $a = -0{,}5$, $b = 9$, $c = -40{,}5$
in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} u_{1,\,2} &= \frac{-9 \pm \sqrt{(9)^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-40{,}5)}}{2 \cdot (-0{,}5)} \\ &= \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 81}}{-1} \\ &= \frac{-9 \pm \sqrt{0}}{-1} \\ &= \frac{-9 \pm 0}{-1} \\ u_1 &= 9 \\ u_2 &= 9 \end{aligned}$$

Rücksubstitution: $u \to x^2$

$$\begin{aligned} u_1 \to \quad x^2 &= 9 \quad \Big| \sqrt{} \\ x_{1,\,2} &= \pm\sqrt{9} \\ x_1 &= 3 \\ x_2 &= -3 \\ u_2 \to \quad x^2 &= 9 \quad \Big| \sqrt{} \\ x_{3,\,4} &= \pm\sqrt{9} \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $x = 3$:

$$\begin{aligned} f''(3) &= 0 \\ f'''(3) &= -36 \end{aligned}$$

$f'''(3) \neq 0 \;\Rightarrow$ Sattelpunkt an der Stelle $x = 3$

$f(3) = -65{,}55 \;\Rightarrow\; S(3 \mid -65{,}55)$

Untersuche die Stelle $x = -3$:

$$\begin{aligned} f''(-3) &= 0 \\ f'''(-3) &= -36 \end{aligned}$$

$f'''(-3) \neq 0 \;\Rightarrow$ Sattelpunkt an der Stelle $x = -3$

$f(-3) = 64{,}05 \;\Rightarrow\; S(-3 \mid 64{,}05)$

Merke:

Sei K_f der Graph einer Funktion f. Besitzt K_f an der Stelle x_0 eine Wendestelle und gilt $f'(x_0) = 0$, so ist der Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ ein <u>Sattelpunkt</u> von K_f.

© 2008 Henrik Horstmann