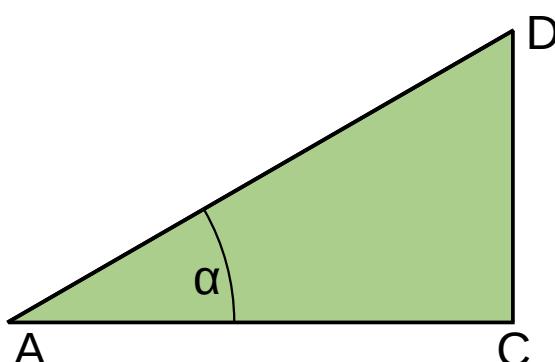
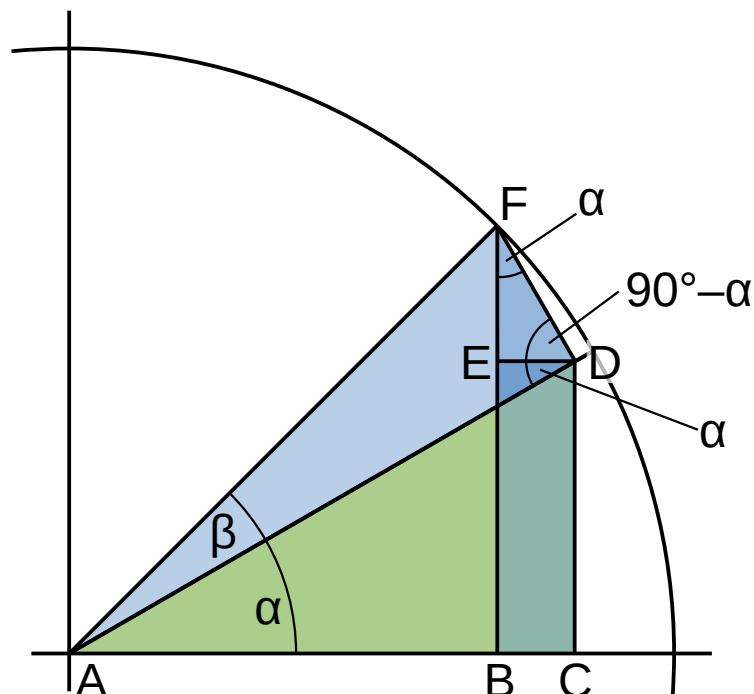


## Ableitung Sinus

### Trigonometrische Additionstheoreme

**Behauptung:**  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

**Beweis:**



$$\sin(\alpha) = \frac{CD}{AD} \Rightarrow CD = \sin(\alpha) \cdot AD$$

$$\cos(\alpha) = \frac{AC}{AD}$$

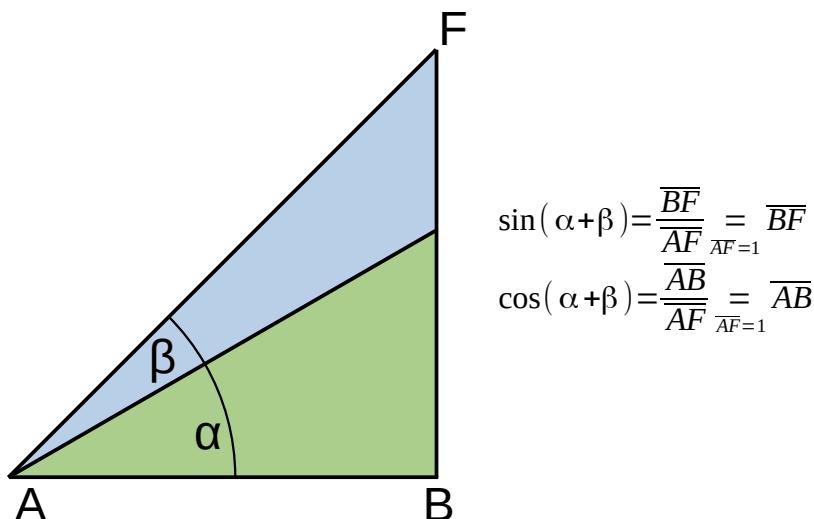
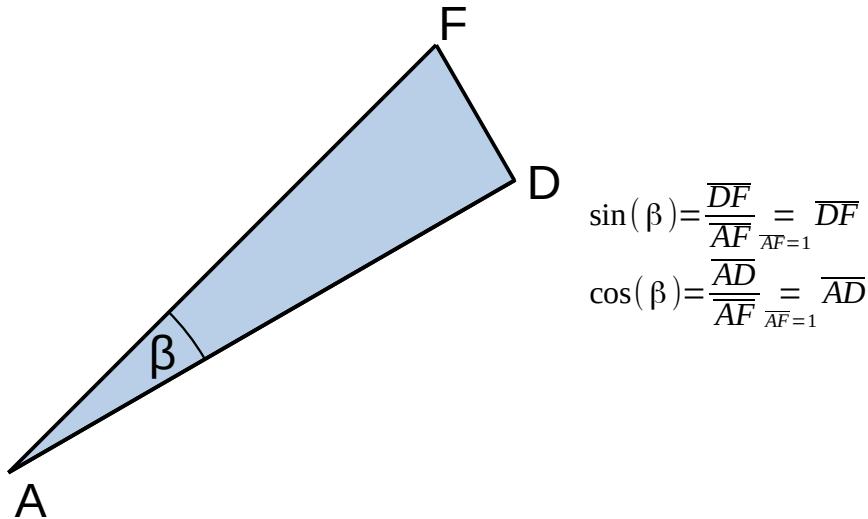
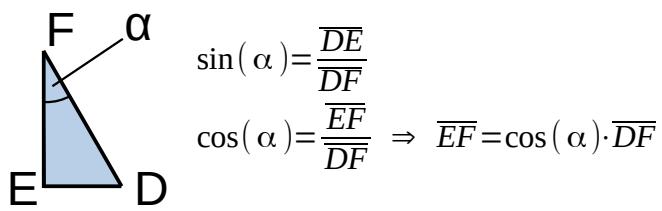


Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz](#).

2020 Henrik Horstmann



# Differentialrechnung



Mit  $\overline{BF} = \overline{CD} + \overline{EF}$  und  $\overline{AC} = \overline{AF} - \overline{BC}$  folgt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\overline{BF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{CD} + \overline{EF}}{\overline{AF}} = \sin(\alpha) \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AF}} + \cos(\alpha) \cdot \frac{\overline{DF}}{\overline{AF}} = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz](#).

2020 Henrik Horstmann

**Behauptung:**  $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$

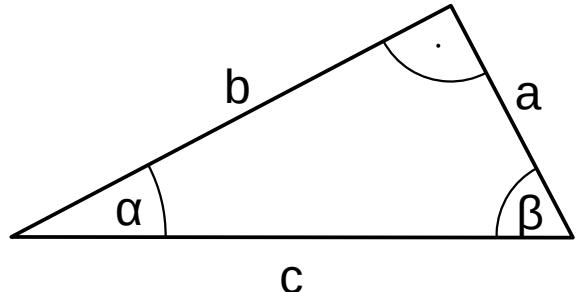
**Beweis:**  $\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$

**Behauptung:**  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

**Beweis:**

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos(\alpha)$$



nach dem Satz von Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \Leftrightarrow (c \cdot \sin(\alpha))^2 + (c \cdot \cos(\alpha))^2 = c^2 \cdot \sin^2(\alpha) + c^2 \cdot \cos^2(\alpha) = c^2 (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) = c^2 \\ &\Leftrightarrow \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \end{aligned}$$

**Behauptung:**  $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} &2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right] \cdot \left[ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \right] \\ &= 2 \cdot \left[ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \\ &= 2 \cdot \left[ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right] \\ &= 2 \cdot \left[ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left( \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left[ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \left( \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \right] \right] \\ &= 2 \cdot \left[ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right] \end{aligned}$$



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz](#).

2020 Henrik Horstmann

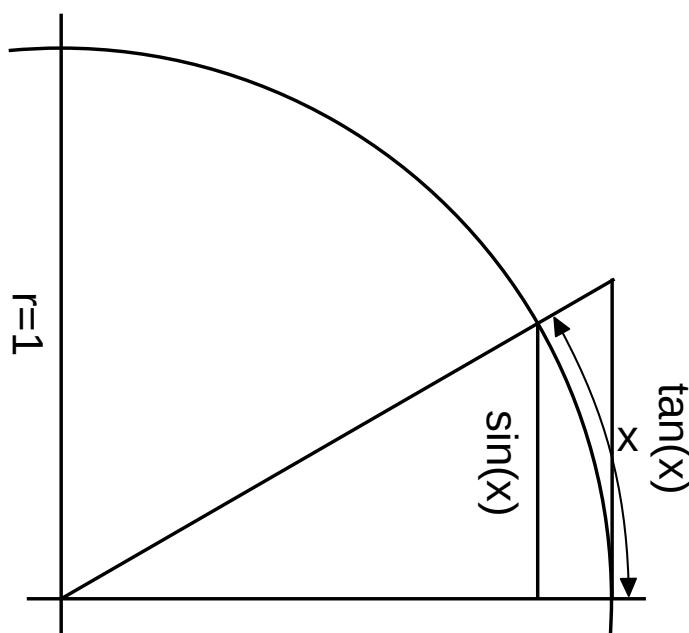
$$= 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2 \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$= \sin(\alpha) - \sin(\beta)$$

## Benötigter Grenzwert

**Behauptung:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x)}{x} \right) = 1$

**Beweis:**



Das Schaubild zeigt, dass für  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  folgendes gilt:

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x) \quad | \text{tan ersetzen}$$

$$\sin(x) \leq x \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad | \div \sin(x)$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \quad | \text{Kehrwert bilden}$$

$$1 \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \cos(x) \quad | \text{Grenzwerte bilden}$$

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} (1) \geq \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x)}{x} \right) \geq \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x)) = 1$$

damit muss  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x)}{x} \right) = 1$  sein.



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz](#).

2020 Henrik Horstmann

## Ableitung vom Sinus

---

**Behauptung:**  $(\sin(x))' = \cos(x)$

**Beweis:**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \right)$$

Substitution:  $x+h \rightarrow \alpha \wedge x \rightarrow \beta$

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha) - \sin(\beta)}{h} \\ &= \text{Additionstheorem} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{h} \end{aligned}$$

Rücksubstitution:  $\alpha \rightarrow x+h \wedge \beta \rightarrow x$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \underbrace{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}_{\rightarrow \cos(x)} \cdot \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{\rightarrow 1} \right) \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$



Dieses Werk ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz](#).

2020 Henrik Horstmann