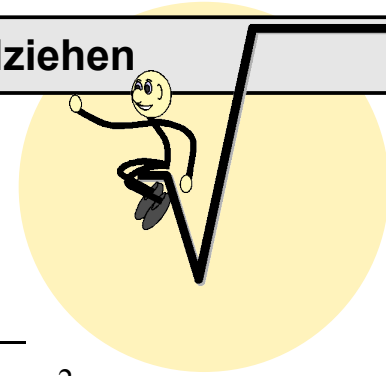


Quadratische Gleichung Lösen: Wurzelziehen



Gegeben ist die Gleichung: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

Gesucht sind **alle** x Werte, für die die Gleichung erfüllt ist (Lösungsmenge).

Die verflixten Brüche!

Um die Gleichung zu vereinfachen, sollen zunächst die Brüche „verschwinden“. Dazu werden **beide** Seiten der Gleichung mit dem gemeinsamen Hauptnenner **aller** Brüche multipliziert.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3} &= \frac{2}{3} \quad | \cdot 6 \text{ (=Hauptnenner)} \\ 3x^2 - 8 &= 4 \end{aligned}$$

Nach x auflösen

1. Nach x^2 auflösen:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8 &= 4 \quad | +8 \\ 3x^2 &= 12 \quad | :3 \\ x^2 &= 4 \end{aligned}$$

2. Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen.
Beim Wurzelziehen gibt es zwei Lösungen!

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \quad | \sqrt{} \\ x_1 &= \sqrt{4} & x_1 &= 2 \\ x_2 &= -\sqrt{4} & x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Damit hat die Gleichung folgende Lösungsmenge: $L = \{-2, 2\}$

Beispiele

Lösen Sie die quadratischen Gleichungen durch Auflösen nach x^2 und Wurzelziehen.

a) $x^2 - \frac{7}{12} = -\frac{1}{3}$

b) $x^2 - 8 = 0$

c) $2x^2 - 8 = x^2 + 17$

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Lösungskarte 1.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Gleichung:

$$x^2 + 4 = 0$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für x .

b) Begründen Sie schriftlich Ihr Ergebnis.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Gleichung:

$$x^2 = 0$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für x .

b) Begründen Sie schriftlich Ihr Ergebnis.

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Lösungskarte 2.

Ergebnisse

Auflösen der Gleichung $ax^2 + c = 0$ nach

x^2 ergibt: $x^2 = -\frac{c}{a}$. In welchen Fällen kann die Gleichung gelöst werden?

Bedingung

Anzahl Lösungen

$$-\frac{c}{a} \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$$

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Lösungskarte 3.

Lösungskarte 1



Beispiele

$$x^2 - \frac{7}{12} = -\frac{1}{3}$$

1. Brüche eliminieren:

$$x^2 - \frac{7}{12} = -\frac{1}{3} \quad | \cdot 12$$

$$12x^2 - 7 = -4$$

2. Nach x^2 auflösen:

$$12x^2 - 7 = -4 \quad | +7$$

$$12x^2 = 3 \quad | :12$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

3. Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen:

$$x^2 = \frac{1}{4} \quad | \sqrt{}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\}$$

$$x^2 - 8 = 0$$

1. Nach x^2 auflösen:

$$x^2 - 8 = 0 \quad | +8$$

$$x^2 = 8$$

2. Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen:

$$x^2 = 8 \quad | \sqrt{}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{8}$$

$$x_{1,2} \approx \pm 2,83$$

Lösungsmenge:

$$L = \{-2,8384, 2,8384\}$$

$$2x^2 - 8 = x^2 + 17$$

1. Nach x^2 auflösen:

$$2x^2 - 8 = x^2 + 17 \quad | +8$$

$$2x^2 = x^2 + 25 \quad | -x^2$$

$$x^2 = 25$$

2. Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen:

$$x^2 = 25 \quad | \sqrt{}$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{25}$$

$$x_{1,2} = \pm 5$$

Lösungsmenge:

$$L = \{-5, 5\}$$

Lösungskarte 2



Aufgabe 1

Gegeben ist die Gleichung:

$$x^2 - 4 = 0$$

- a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für x .
b) Begründen Sie schriftlich Ihr Ergebnis.

Lösung:

zu a) und b) Gegeben ist $x^2 + 4 = 0$:

$$x^2 + 4 = 0 \quad | -4$$

$$x^2 = -4$$

Da $x^2 < 0$ ist, gibt es keine Lösung.

$$\Rightarrow L = \emptyset$$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Gleichung:

$$x^2 = 0$$

- a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für x .
b) Begründen Sie schriftlich Ihr Ergebnis.

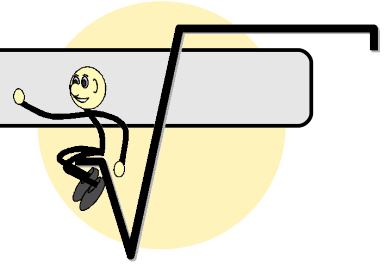
Lösung:

zu a) und b) Gegeben ist $x^2 = 0$:

$x^2 = 0$ damit ist nach dem Satz vom Nullprodukt auch $x = 0$.

$$\Rightarrow L = \{0\}$$

Lösungskarte 3



Ergebnisse

Auflösen der Gleichung $ax^2 + c = 0$ nach x^2 ergibt: $x^2 = -\frac{c}{a}$.

In welchen Fällen kann die Gleichung gelöst werden?

Bedingung	Anzahl Lösungen	
$-\frac{c}{a} > 0$	zwei	(Gleichung kann gelöst werden)
$-\frac{c}{a} = 0$	eine (doppelte)	(Gleichung kann gelöst werden)
$-\frac{c}{a} < 0$	keine	(Gleichung kann nicht gelöst werden)