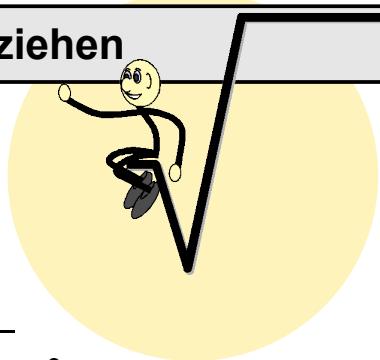


Quadratische Gleichung Lösen: Wurzelziehen

Gegeben ist die Gleichung: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

Gesucht sind **alle** x Werte, für die die Gleichung erfüllt ist (Lösungsmenge).



Die verflixten Brüche!

Um die Gleichung zu vereinfachen, sollen zunächst die Brüche „verschwinden“. Dazu werden **beide** Seiten der Gleichung mit dem gemeinsamen Hauptnenner **aller** Brüche multipliziert.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3} &= \frac{2}{3} \quad | \cdot 6 \quad (= \text{Hauptnenner}) \\ 3x^2 - 8 &= 4\end{aligned}$$

Nach x auflösen

1. Nach x^2 auflösen:

$$\begin{aligned}3x^2 - 8 &= 4 \quad | +8 \\ 3x^2 &= 12 \quad | \div 3 \\ x^2 &= 4\end{aligned}$$

2. Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen.

Beim Wurzelziehen gibt es zwei Lösungen!

$$\begin{aligned}x^2 &= 4 \quad | \sqrt{} \\ x_1 &= \sqrt{4} & x_1 &= 2 \\ x_2 &= -\sqrt{4} & x_2 &= -2\end{aligned}$$

Damit hat die Gleichung folgende Lösungsmenge: $L = [-2, 2]$

Beispiele

Lösen Sie die quadratischen Gleichungen durch Auflösen nach x^2 und Wurzelziehen.

a) $x^2 - \frac{7}{12} = -\frac{1}{3}$

b) $x^2 - 8 = 0$

c) $2x^2 - 8 = x^2 + 17$

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Lösungskarte 1.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Gleichung:

$$x^2 + 4 = 0$$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Gleichung:

$$x^2 = 0$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für x .

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für x .

b) Begründen Sie schriftlich Ihr Ergebnis.

b) Begründen Sie schriftlich Ihr Ergebnis.

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Lösungskarte 2.

Ergebnisse

Auflösen der Gleichung $ax^2 + c = 0$ nach

x^2 ergibt: $x^2 = -\frac{c}{a}$. In welchen Fällen kann die Gleichung gelöst werden?

Bedingung

$$-\frac{c}{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{array} \right.$$

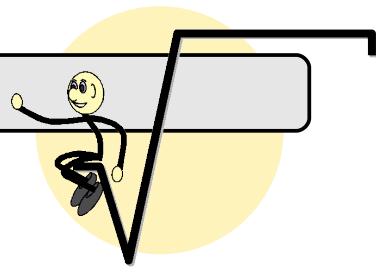
Anzahl Lösungen

> 0 _____

$= 0$ _____

< 0 _____

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Lösungskarte 3.

Lösungskarte 1**Beispiele**

$$x^2 - \frac{7}{12} = -\frac{1}{3}$$

1. Brüche eliminieren:

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{7}{12} &= -\frac{1}{3} \quad | \cdot 12 \\ 12x^2 - 7 &= -4 \end{aligned}$$

2. Nach x^2 auflösen:

$$\begin{aligned} 12x^2 - 7 &= -4 \quad | +7 \\ 12x^2 &= 3 \quad | :12 \\ x^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3. Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{4} \quad | \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ x_1 &= \frac{1}{2} \quad x_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\}$$

$$x^2 - 8 = 0$$

1. Nach x^2 auflösen:

$$\begin{aligned} x^2 - 8 &= 0 \quad | +8 \\ x^2 &= 8 \end{aligned}$$

2. Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen:

$$\begin{aligned} x^2 &= 8 \quad | \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm \sqrt{8} \\ x_{1,2} &\approx \pm 2,83 \end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$L = \{-2,8384, 2,8384\}$$

$$2x^2 - 8 = x^2 + 17$$

1. Nach x^2 auflösen:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8 &= x^2 + 17 \quad | +8 \\ 2x^2 &= x^2 + 25 \quad | -x^2 \\ x^2 &= 25 \end{aligned}$$

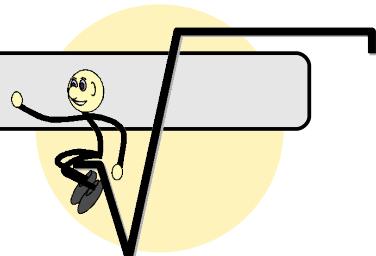
2. Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen:

$$\begin{aligned} x^2 &= 25 \quad | \sqrt{} \\ x_{1,2} &= \pm \sqrt{25} \\ x_{1,2} &= \pm 5 \end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$$L = \{-5, 5\}$$

© 2010 Henrik Horstmann

Lösungskarte 2**Aufgabe 1**

Gegeben ist die Gleichung:

$$x^2 - 4 = 0$$

- a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für x .
b) Begründen Sie schriftlich Ihr Ergebnis.

Lösung:zu a) und b) Gegeben ist $x^2 + 4 = 0$:

$$\begin{aligned} x^2 + 4 &= 0 \quad | -4 \\ x^2 &= -4 \end{aligned}$$

Da $x^2 < 0$ ist, gibt es keine Lösung.

$$\Rightarrow L = \emptyset$$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Gleichung:

$$x^2 = 0$$

- a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für x .
b) Begründen Sie schriftlich Ihr Ergebnis.

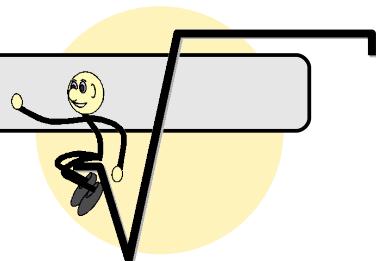
Lösung:zu a) und b) Gegeben ist $x^2 = 0$:

$x^2 = 0$ damit ist nach dem Satz vom Nullprodukt auch $x = 0$.

$$\Rightarrow L = \{0\}$$

© 2010 Henrik Horstmann

Lösungskarte 3



Ergebnisse

Auflösen der Gleichung $ax^2 + c = 0$ nach x^2 ergibt: $x^2 = -\frac{c}{a}$.

In welchen Fällen kann die Gleichung gelöst werden?

Bedingung	Anzahl Lösungen	
$-\frac{c}{a} > 0$	zwei	(Gleichung kann gelöst werden)
$= 0$	eine (doppelte)	(Gleichung kann gelöst werden)
< 0	keine	(Gleichung kann nicht gelöst werden)