Aufgaben zu Nullstellen [1]

Nullstellen berechnen

Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstellen folgender Funktionen: $x \in \mathbb{R}$

a) $f(x) = -2x^2 + 18$

b) $f(x) = 2x^2 + 10x$

c) $f(x) = -3x^2 - 2x + 5$

d) $f(x) = -\frac{5}{3}x^2 - \frac{15}{2}x$

e) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

f) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{8}$

g) $f(x) = x\left(-x^2 + x\right)$

h) $f(x) = \left(x^2 - 8x + 15\right)(x - 2)$

i) $f(x) = (x+1)\left(\frac{1}{7}x^2 + \frac{6}{7}x + \frac{5}{7}\right)$

j) $f(x) = \left(-\frac{2}{3}x^2 - 3\right)\left(x^2 + \frac{15}{2}x - 4\right)$

Funktionsgleichungen zuordnen

Ordnen Sie die Funktionsgleichungen den Schaubilden zu:

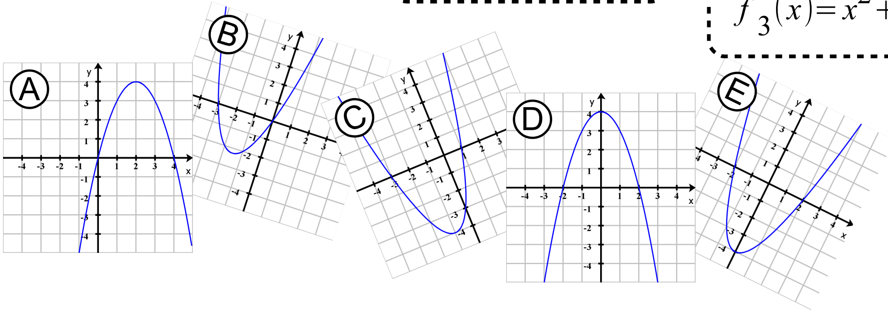
$f_1(x) = x^2 + \blacksquare x - \blacksquare$

$f_2(x) = -x^2 + \blacksquare$

$f_3(x) = x^2 + \blacksquare x$

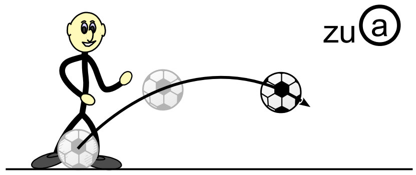
$f_4(x) = x^2 - \blacksquare$

$f_5(x) = -x^2 + \blacksquare x$

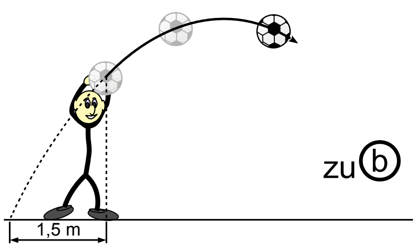


Hinweis: Die Kleckse verdecken ausschließlich Zahlen.

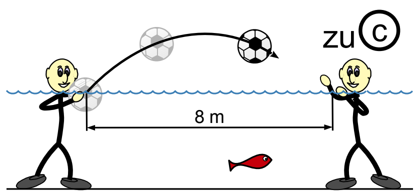
Nullstellen im Sport



a) Nach welcher Entfernung wird der Ball wieder auf den Boden treffen, wenn die Flugbahn durch die Funktion $f(x) = -x^2 + 16x - 28$ beschrieben wird?



b) Wie groß ist die Entfernung zwischen dem Abwurf- und der Aufprallstelle, wenn die Flugbahn durch die Funktion $f(x) = -x^2 + x + 6$ beschrieben wird?



c) Die Wurfbahn wird durch die Funktion $f(x) = -2x^2 + 17x$ beschrieben.

1. Warum wird der rechte Spieler den Ball nicht fangen,wenn er seine Position beibehält?
2. Wie muss die Funktionsgleichung für die Wurfbahn verändert werden, damit der rechte Spieler den Ball fangen kann, wenn er seine Position bei behält?

Aussagen zu Funktionsgleichungen

f und h sind Funktionen mit $f(x)=ax^2+bx+c$ und $h(x)=x\left(x^2+c\right)$, $x\in\mathbb{R}$. K_f ist der Graph von f und K_h ist der Graph von h.

a) K_f Geht durch den Ursprung und hat eine Nullstelle $x\neq 0$. Welche Aussagen können Sie zu a, b und c machen?

b) h hat genau eine Nullstelle. Welche Aussage können Sie zu c machen?

Funktionsgleichungen gesucht

a) h Ist eine Funktion mit $h(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}$, $x\in\mathbb{R}$. $f(x)=h(x+a)$, $a\in\mathbb{R}$. f hat die Nullstellen $N(-1\mid 0)$ und $N(3\mid 0)$. Bestimmen Sie a.

b) K_f ist der Graph einer Funktion f mit $f(x)=(x-a)\left(-2x^2-\frac{3}{2}x\right)$. K_f ist symmetrisch zum Ursprung. Bestimmen Sie a.

Lösungsvorschläge

Nullstellen berechnen

a)

Setze $f(x)=0$:

$$\begin{aligned}
-2x^2+18 &= 0 \quad &&|-18\\
-2x^2 &= -18 \quad &&|\div(-2)\\
x^2 &= 9 \quad &&|\sqrt{\ }\\
x_{1,\ 2} &= \pm\sqrt{9}\\
\\
x_1 &= 3\\
x_2 &= -3
\end{aligned}$$

$\Rightarrow N_1(3 \mid 0),\quad N_2(-3 \mid 0)$

b)

Setze $f(x)=0$:

$$\begin{aligned}
2x^2+10x &= 0\\
x(2x+10) &= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ x_1=0$ oder $2x+10=0$

$$\begin{aligned}
2x+10 &= 0 \quad &&|-10\\
2x &= -10 \quad &&|\div 2\\
x_2 &= -5
\end{aligned}$$

$\Rightarrow N_1(0 \mid 0),\quad N_2(-5 \mid 0)$

c)

Setze $f(x)=0$:

$$-3x^2-2x+5 = 0$$

Setze $a=-3,\ b=-2,\ c=5$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
x_{(1,\ 2)} &= \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-3)\cdot 5}}{2\cdot(-3)}\\
&= \frac{2\pm\sqrt{4+60}}{-6}\\
&= \frac{2\pm\sqrt{64}}{-6}\\
&= \frac{2\pm 8}{-6}\\
x_1 &= 1\\
x_2 &= -\frac{5}{3}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow N_1(1 \mid 0),\quad N_2\left(-\frac{5}{3} \,\middle|\, 0\right)$

d)

Setze $f(x)=0$:

$$-\frac{5}{3}x^2-\frac{15}{2}x=0 \quad \Big| \cdot 6$$

$$\begin{aligned} -10x^2-45x &= 0 \\ x(-10x-45) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $x_1=0$ oder $-10x-45=0$

$$\begin{aligned} -10x-45 &= 0 \quad \Big| +45 \\ -10x &= 45 \quad \Big| \div(-10) \\ x_2 &= -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_1(0 \mid 0), \quad N_2\left(-\frac{9}{2} \;\Big|\; 0\right)$$

e)

Setze $f(x)=0$:

$$-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2=0 \quad \Big| \cdot 2$$

$$-x^2+3x+4 = 0$$

Setze $a=-1,\ b=3,\ c=4$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{(1,\,2)} &= \frac{-3\pm\sqrt{(3)^2-4\cdot(-1)\cdot 4}}{2\cdot(-1)} \\ &= \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{-2} \\ &= \frac{-3\pm\sqrt{25}}{-2} \\ &= \frac{-3\pm 5}{-2} \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_1(-1 \mid 0), \quad N_2(4 \mid 0)$$

f)

Setze $f(x)=0$:

$$\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{8}=0 \quad \Big| \cdot 8$$

$$\begin{aligned} 12x^2-3 &= 0 && \Big|+3 \\ 12x^2 &= 3 && \Big|\div 12 \\ x^2 &= \frac{1}{4} && \Big|\sqrt{\ } \\ x_{1,\ 2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \\ x_1 &= \frac{1}{2} \\ x_2 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_1\left(\frac{1}{2}\ \Big|\ 0\right), \quad N_2\left(-\frac{1}{2}\ \Big|\ 0\right)$$

g)

Setze $f(x)=0$:

$$x\left(-x^2+x\right) = 0$$

$\Rightarrow \ x_1=0$ oder $-x^2+x=0$

$$\begin{aligned} -x^2+x &= 0 \\ x(-x+1) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \ x_2=0$ oder $-x+1=0$

$$\begin{aligned} -x+1 &= 0 && \Big|-1 \\ -x &= -1 && \Big|\div(-1) \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_{1,\ 2}(0\ |\ 0), \quad N_3(1\ |\ 0)$$

h)

Setze $f(x)=0$:

$\left(x^2-5x-6\right)(x-2) \quad = \quad 0$

$\Rightarrow \; x^2-5x-6=0$ oder $x-2=0$

$x^2-5x-6 \quad = \quad 0$

Setze $a=1, \; b=-5, \; c=-6$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2} \\ &= \frac{5\pm\sqrt{49}}{2} \\ &= \frac{5\pm 7}{2} \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-2 &= 0 \quad \mid +2 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow N_1(-1 \mid 0), \quad N_2(6 \mid 0), \quad N_3(2 \mid 0)$

i)

Setze $f(x)=0$:

$(x+1)\left(\frac{1}{7}x^2+\frac{6}{7}x+\frac{5}{7}\right) \quad = \quad 0$

$\Rightarrow \; x+1=0$ oder $\frac{1}{7}x^2+\frac{6}{7}x+\frac{5}{7}=0$

$$\begin{aligned} x+1 &= 0 \quad \mid -1 \\ x_1 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}x^2+\frac{6}{7}x+\frac{5}{7} &= 0 \quad \mid \cdot 7 \\ x^2+6x+5 &= 0 \end{aligned}$$

Setze $a=1, \; b=6, \; c=5$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{-6\pm\sqrt{36-20}}{2} \\ &= \frac{-6\pm\sqrt{16}}{2} \\ &= \frac{-6\pm 4}{2} \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= -5 \end{aligned}$$

$\Rightarrow N_1(-1 \mid 0), \quad N_2(-1 \mid 0), \quad N_3(-5 \mid 0)$

j)

Setze $f(x)=0$:

$$\left(-\frac{2}{3}x^2-3x\right)\left(x^2+\frac{15}{2}x-4\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ -\frac{2}{3}x^2-3x=0 \text{ oder } x^2+\frac{15}{2}x-4=0$$

$$-\frac{2}{3}x^2-3x = 0 \quad |\cdot 3$$

$$-2x^2-9x = 0$$

$$x(-2x-9) = 0$$

$$\Rightarrow\ x_1=0 \text{ oder } -2x-9=0$$

$$-2x-9 = 0 \quad |+9$$

$$-2x = 9 \quad |\div(-2)$$

$$x_2 = -\frac{9}{2}$$

$$x^2+\frac{15}{2}x-4 = 0 \quad |\cdot 2$$

$$2x^2+15x-8 = 0$$

Setze $a=2,\ b=15,\ c=-8$ in die Lösungsformel ein:

$$x_{1,\,2} = \frac{-15\pm\sqrt{(15)^2-4\cdot 2\cdot(-8)}}{2\cdot 2}$$

$$= \frac{-15\pm\sqrt{225+64}}{4}$$

$$= \frac{-15\pm\sqrt{289}}{4}$$

$$= \frac{-15\pm 17}{4}$$

$$x_3 = -8$$

$$x_4 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow N_1(0\ |\ 0),\quad N_2\left(-\frac{9}{2}\ \middle|\ 0\right),\quad N_3(-8\ |\ 0),\quad N_4\left(\frac{1}{2}\ \middle|\ 0\right)$$

Funktionsgleichungen zuordnen

$f_1 \to$ C

$f_2 \to$ D

$f_3 \to$ B

$f_4 \to$ E

$f_5 \to$ A

Nullstellen im Sport

a) Nullstellen von f berechnen:
Setze $f(x)=0$:

$$-x^2+16x-28 = 0$$

Setze $a=-1,\ b=16,\ c=-28$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-16\pm\sqrt{(16)^2-4\cdot(-1)\cdot(-28)}}{2\cdot(-1)} \\
&= \frac{-16\pm\sqrt{256-112}}{-2} \\
&= \frac{-16\pm\sqrt{144}}{-2} \\
&= \frac{-16\pm 12}{-2} \\
x_1 &= 2 \\
x_2 &= 14
\end{aligned}$$

Nach einer Entfernung von $x_2-x_1=14-2=12$ m wird der Ball wieder auf den Boden treffen.

b) Bestimme die Nullstellen von f:
Setze $f(x)=0$:

$$-x^2+x+6 = 0$$

Setze $a=-1,\ b=1,\ c=6$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4\cdot(-1)\cdot 6}}{2\cdot(-1)} \\
&= \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{-2} \\
&= \frac{-1\pm\sqrt{25}}{-2} \\
&= \frac{-1\pm 5}{-2} \\
x_1 &= -2 \\
x_2 &= 3
\end{aligned}$$

Abstand zwischen den Nullstellen: $x_2-x_1=3-(-2)=5$ m. Abstand zwischen der Abwurf- und Aufprallstelle: $5-1{,}5=3{,}5$ m.

c) Nullstellen von f berechnen:
Setze $f(x)=0$:

$$\begin{aligned} -2x^2+17x &= 0 \\ x(-2x+17) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \; x_1=0$ oder $-2x+17=0$

$$\begin{aligned} -2x+17 &= 0 & &|-17 \\ -2x &= -17 & &|\div(-2) \\ x_2 &= \frac{17}{2} \end{aligned}$$

1. Der Ball wird nach 8,5 m wieder auf die Wasseroberfläche treffen, 0,5 m hinter dem rechten Spieler.
2. Wenn im Funktionsterm die 17 durch 16 ersetzt wird, kann der rechte Spieler den Ball fangen.

Aussagen zu Funktionsgleichungen

a) Fall 1: $a<0 \;\wedge\; b=0 \;\wedge\; c>0$
Fall 2: $a>0 \;\wedge\; b<0 \;\wedge\; c=0$

b) h hat eine Nullstelle bei $x=0$. Wenn dies die einzige Nullstelle ist, dann darf $x^2+c=0$ keine Lösung haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn $c>0$ ist.

Funktionsgleichungen gesucht

Geben Sie jeweils eine Funktionsgleichung an, die zu den gegebenen Bedingungen passt.

a) Berechne die Nullstellen von h:
Setze $h(x)=0$:

$$-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}=0 \quad |\cdot 3$$

$$\begin{aligned} -x^2+4 &= 0 & &|-4 \\ -x^2 &= -4 & &|\div(-1) \\ x^2 &= 4 & &|\sqrt{\ } \\ x_{1,\,2} &= \pm\sqrt{4} \\ \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow N_1(2 \mid 0), \quad N_2(-2 \mid 0)$

f geht durch eine vertikale Verschiebung von h hervor und hat die Nullstellen $N(-1 \mid 0)$ und $N(3 \mid 0)$ $\Rightarrow$ $a=-1$

b) Bestimme die Nullstellen von f :

Setze $f(x)=0$:

$$(x-a)\left(-2x^2-\frac{3}{2}x\right)=0$$

$\Rightarrow$ $x-a=0$ oder $-2x^2-\frac{3}{2}x=0$

$$\begin{aligned} x-a &= 0 \quad |+a \\ x_1 &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x^2-\frac{3}{2}x &= 0 \quad |\cdot 2 \\ -4x^2-3x &= 0 \\ x(-4x-3) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $x_2=0$ oder $-4x-3=0$

$$\begin{aligned} -4x-3 &= 0 \quad |+3 \\ -4x &= 3 \quad |\div(-4) \\ x_3 &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_1(a \mid 0),\quad N_2(0 \mid 0),\quad N_3\left(-\frac{3}{4} \,\middle|\, 0\right)$$

Da K_f symmetrisch zum Ursprung ist, muss $a=\frac{3}{4}$ sein.