Lösungen zu Funktionen (Nullstellen (1))

Bestimmen Sie die Nullstellen zu folgenden Funktionen:

a) $f(x)=3x^2+\frac{x}{2}-1$

<u>Lösung:</u>

Setze $f(x)=0$:

$$\begin{aligned} 3x^2+\frac{1}{2}x-1 &= 0 \quad |\cdot 2 \\ 6x^2+x-2 &= 0 \end{aligned}$$

Setze $a=6,\ b=1,\ c=-2$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4\cdot 6\cdot(-2)}}{2\cdot 6} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{12} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{49}}{12} \\ &= \frac{-1\pm 7}{12} \\ x_1 &= \frac{1}{2} \\ x_2 &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ N_1\left(\frac{1}{2}\ \middle|\ 0\right)\ N_2\left(-\frac{2}{3}\ \middle|\ 0\right)$

b) $f(x)=-\frac{x^2}{5}-4938x-30479805$

<u>Lösung:</u>

Setze $f(x)=0$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{5}x^2-4938x-30479805 &= 0 \quad |\cdot 5 \\ -x^2-24690x-152399025 &= 0 \end{aligned}$$

Setze $a=-1,\ b=-24690,\ c=-152399025$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{24690\pm\sqrt{(-24690)^2-4\cdot(-1)\cdot(-152399025)}}{2\cdot(-1)} \\ &= \frac{24690\pm\sqrt{609596100-609596100}}{-2} \\ &= \frac{24690\pm\sqrt{0}}{-2} \\ &= \frac{24690\pm 0}{-2} \\ x_1 &= -12345 \\ x_2 &= -12345 \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ N(-12345\ |\ 0)$

c) $f(x)=3x^2-\frac{11}{3}x+2$

<u>Lösung:</u>

Setze $f(x)=0$:

$$\begin{aligned} 3x^2-\frac{11}{3}x+2 &= 0 \quad | \cdot 3 \\ 9x^2-11x+6 &= 0 \end{aligned}$$

Setze $a=9,\ b=-11,\ c=6$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{1,\,2} &= \frac{11\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot 9\cdot 6}}{2\cdot 9} \\ &= \frac{11\pm\sqrt{121-216}}{18} \\ &= \frac{11\pm\sqrt{-95}}{18} \end{aligned}$$

$\sqrt{-95}$ hat keine Lösung $\Rightarrow$ es existieren keine Nullstellen

d) $f(x)=-x^3+\frac{7}{2}x^2-\frac{5}{2}x$

<u>Lösung:</u>

Setze $f(x)=0$:

$$\begin{aligned} -x^3+\frac{7}{2}x^2-\frac{5}{2}x &= 0 \quad | \cdot 2 \\ -2x^3+7x^2-5x &= 0 \\ x\left(-2x^2+7x-5\right) &= 0 \end{aligned}$$

$\underset{\text{Satz vom Nullprodukt}}{\Rightarrow}$ $x=0$ oder $-2x^2+7x-5=0$

$$-2x^2+7x-5 = 0$$

Setze $a=-2,\ b=7,\ c=-5$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{2,\,3} &= \frac{-7\pm\sqrt{(7)^2-4\cdot(-2)\cdot(-5)}}{2\cdot(-2)} \\ &= \frac{-7\pm\sqrt{49-40}}{-4} \\ &= \frac{-7\pm\sqrt{9}}{-4} \\ &= \frac{-7\pm 3}{-4} \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow N_1(0 \mid 0),\quad N_2(1 \mid 0),\quad N_3\left(\frac{5}{2} \,\middle|\, 0\right)$

e) $f(x)=-\frac{2}{7}x^4+\frac{4}{7}x^3$

Lösung:

Setze $f(x)=0$:

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & 0 & \\ -\frac{2}{7}x^4+\frac{4}{7}x^3 & = & 0 & \mid \cdot 7 \\ -2x^4+4x^3 & = & 0 & \\ x^3(-2x+4) & = & 0 & \end{array}$$

$\underset{\text{Satz vom Nullprodukt}}{\Rightarrow}$ $x^3=0$ oder $-2x+4=0$

$x_1=0$

$$\begin{array}{rcll} -2x+4 & = & 0 & \mid -4 \\ -2x & = & -4 & \mid \div(-2) \\ x & = & 2 & \end{array}$$

$\Rightarrow N_1(0 \mid 0),\quad N_2(2 \mid 0)$

Gegeben ist eine Funktion f_a mit $f_a(x)=(x-2)\left(x^2-ax-2x+2a\right), a\in\mathbb{R}$

Lösung:

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen von f_a.

Lösung:

Setze $f_a(x)=0$:

$(x-2)\left(x^2-ax-2x+2a\right)=0$

$\underset{\text{Satz vom Nullprodukt}}{\Rightarrow}$ $x=2 \lor x^2-(a+2)x+2a=0$

Mit der Lösungsformel ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl} x_{1,2} & = & \frac{a+2\pm\sqrt{(a+2)^2-4\cdot 2a}}{2} \\ & = & \frac{a+2\pm\sqrt{a^2+4a+4-8a}}{2} \\ & = & \frac{a+2\pm\sqrt{a^2-4a+4}}{2} \\ & = & \frac{a+2\pm\sqrt{(a-2)^2}}{2} \\ & = & \frac{a+2\pm(a-2)}{2} \\ x_1 & = & a \\ x_2 & = & 2 \end{array}$$

$\Rightarrow\ N_{1,2}(2 \mid 0)\ N_3(a \mid 0)$

1.2 Für welchen Wert von $a\in\mathbb{R}$ besitzt f_a nur eine Nullstelle und wo liegt diese?

Lösung:

Für $a=2$ gibt es nur die eine Nullstelle $N(2 \mid 0)$.

1.3 Begründen Sie, dass f_a mindestens eine und maximal zwei Nullstellen hat.

Lösung:

Die Rechnung aus 1.1 zeigt, dass f_a immer die Nullstelle $N(2 \mid 0)$ hat. Somit existiert mindestens eine Nullstele. Ist $a \neq 2$ so existieren zwei Nullstellen $N(2 \mid 0) \wedge N(a \mid 0)$.

Gegeben ist die Funktion f_a mit $f_a(x) = x^5 - a^2 x^3 - 9x^3 + 9a^2 x$, $a \in \mathbb{R}$. f_a besitzt die Nullstellen $N(3 \mid 0)$ und $N(-a \mid 0)$.

a) Wie viele Nullstellen besitzt f_a mindestens? Begründen Sie Ihre Antwort.

<u>Lösung:</u>

Drei Nullstellen besitzt f_a mindestens: Zunächst einmal hat f_a die Nullstelle $N(3 \mid 0)$. Da das u Schaubild von f_a symmetrisch zum Ursprung ist, besitzt f_a außerdem die Nullstellen $N(-3 \mid 0)$ und $N(0 \mid 0)$. Ist $a \in \{-3;3\}$, gibt es mindestens 3 Nullstellen.

b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat f_a mindestens fünf verschiedene Nullstellen? Geben Sie die Nullstellen an.

<u>Lösung:</u>

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3;3\}$ hat f_a mindestens fünf verschiedene Nullstellen: $N(3 \mid 0)$, $N(-3 \mid 0)$, $N(0 \mid 0)$, $N(-a \mid 0)$ und $N(a \mid 0)$.

