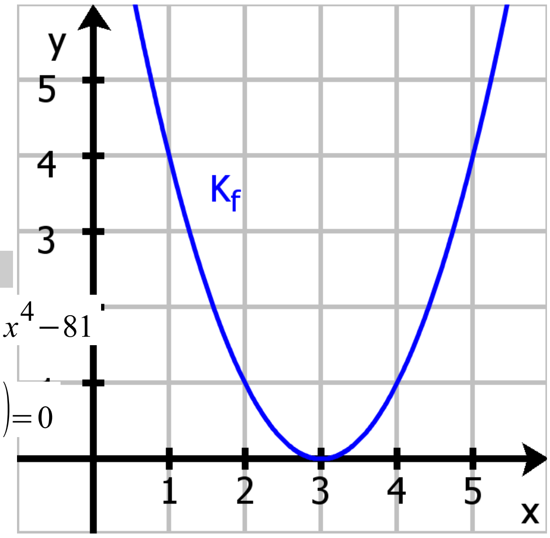
Ganzrationale Funktionen: Produktdarstellung

Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^2-6x+9,\ x\in\mathbb{R}$
mit dem Schaubild:



Anwenden der binomischen Formel:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & a^2 & - & 2ab & + & b^2 & = & (a-b)^2 \\ f(x) & = & x^2 & - & 6x & + & 9 & = & (x-3)^2 \end{array}$$

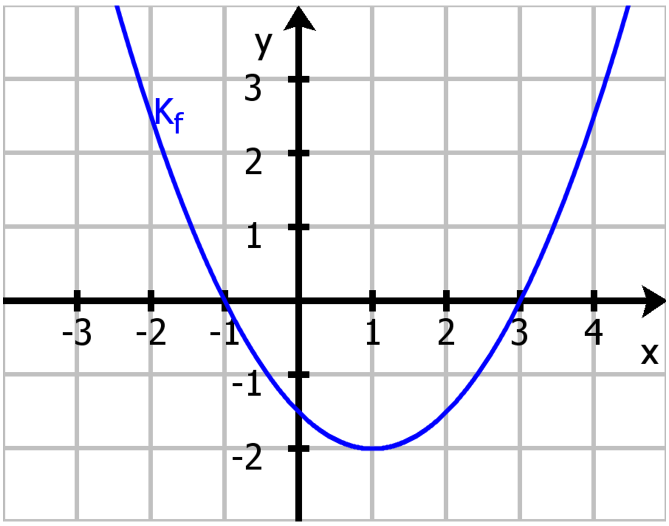
Beispiele

a) Gesucht sind die Nullstellen der Funktion $p(x)=x^4-81$
   Lösung: Setze $p(x)=0$:
   $p(x)=x^4-81=(x^2-9)(x^2+9)=(x-3)(x+3)(x^2+9)=0$
   Mit dem Satz vom Nullprodukt ist
   $x=3 \ \vee \ x=-3$
   $x^2+9=0 \ \Rightarrow \ x^2=-9$ hat keine Lösung.

b) Gesucht sind die Nullstellen der Funktion $f(x)=x^4-8x^2+16,\ x\in\mathbb{R}$
   Lösung: Setze $f(x)=0$:
   $f(x)=x^4-8x^2+16=(x^2-4)^2=((x-2)(x+2))^2=(x-2)(x+2)(x-2)(x+2)=0$
   Mit dem Satz vom Nullprodukt hat die Gleichung folgende Lösungen:
   $x_{1,2}=-2,\ x_{3,4}=2$.

Allgemein

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$ $x\in\mathbb{R}$ mit dem Schaubild:



Nullstellen von f:

Setze $f(x)=0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}(x^2-2x-3)=0$

$\underset{\text{Staz vom Nullprodukt}}{\Rightarrow} \quad x^2-2x-3=0$

$a=1$, $b=-2$ und $c=-3$ in die Lösungsformel einsetzen:

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}$$
$$=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=1\pm 2$$

Damit hat die Parabel folgende Nullstellen: $N_1(-1 \mid 0)$ und $N_2(3 \mid 0)$.
Es gilt:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(x^2-2x-3)=\frac{1}{2}(x+1)(x-3)$$

Beweis:

$$\frac{1}{2}(x+1)(x-3)=\frac{1}{2}(x^2-3x+x-3)=\frac{1}{2}(x^2-2x-3)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$$