Beispiele zu Schnittpunkte

Aufgabe 1

K_f und K_p sind die Graphen der Funktionen

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{4}x^2-x+1 \text{ und } p(x)=-\frac{1}{2}x^2-x \qquad x\in\mathbb{R}$$

a) Zeigen Sie, dass K_f und K_p sich für $x\geq 0$ nicht schneiden.

b) Wie liegen K_f und K_p für $x\geq 0$ zueinander?

c) K_h Ist der Graph einer Funktion h. Die Lösungsmenge der Gleichung $-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{4}x^2-1=0$ enthält alle Schnittstellen von K_f und K_h. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von h und die Schnittpunkte von K_f und K_h.

Aufgabe 2

K_p und K_h sind die Graphen der Funktionen

$$p(x)=\frac{2}{9}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2} \text{ und } h(x)=\frac{1}{x-2}+1 \qquad x\in\mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von K_p und K_h

b) Wie liegen K_p und K_h zueinander?

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

zu a) Schnittstellen von K_f und K_h $\Rightarrow$ betrachte den Funktionsterm der Differenzenfunktion:

$$f(x)-p(x) \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}x^3-\frac{1}{4}x^2-x+1-\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right) \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2+1>0 \text{ für } x\geq 0$$

Damit schneiden sich K_f und K_p nicht für $x\geq 0$.

zu b) Da

1. K_f und K_p sich für $x\geq 0$ nicht schneiden
2. f und p ganzrationale Funktionen sind
3. $f(0)>0$ und $p(0)=0$

$\Rightarrow f(x)>p(x)$ für $x\geq 0$ $\Rightarrow K_f$ verläuft oberhalb von K_p für $x\geq 0$

zu c) $h(x)-f(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{4}x^2-1 \;\Rightarrow\; h(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{4}x^2-1+f(x)$

$$\Rightarrow\; h(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{4}x^2-1+\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{4}x^2-x+1=-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}x^3+x^2-x$$

Schnittstellen: Löse die Gleichung $-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{4}x^2-1=0$ nach x auf:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{4}x^2-1 &= 0 \quad \mid \cdot 4 \\ -x^4+5x^2-4 &= 0 \quad \mid \text{Substitution: } x^2 \rightarrow u \\ -u^2+5u-4 &= 0 \end{aligned}$$

Setze $a=-1,\ b=5,\ c=-4$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} u_{1,2} &= \frac{-5\pm\sqrt{(5)^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)}}{2\cdot(-1)} \\ &= \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{-2} \\ &= \frac{-5\pm\sqrt{9}}{-2} \\ &= \frac{-5\pm 3}{-2} \\ u_1 &= 4 \\ u_2 &= 1 \end{aligned}$$

Resubstitution: $u \rightarrow x^2$

$$
\begin{aligned}
u_1 \quad \rightarrow \quad x^2 &= 4 \qquad \Big| \sqrt{\ } \\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{4} \\
x_{1,2} &= \pm 2 \\
x_1 &= 2 \\
x_2 &= -2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2 \quad \rightarrow \quad x^2 &= 1 \qquad \Big| \sqrt{\ } \\
x_{3,4} &= \pm\sqrt{1} \\
x_{3,4} &= \pm 1 \\
x_3 &= 1 \\
x_4 &= -1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow x=2 \ \vee \ x=-2 \ \vee x=1 \ \vee \ x=-1$

Schnittpunkte:

$h(-2)=0 \ \Rightarrow \ S_1(-2 \mid 0)$

$h(2)=0 \ \Rightarrow \ S_2(2 \mid 0)$

$h(1)=0 \ \Rightarrow \ S_3(1 \mid 0)$

$h(-1)=\frac{3}{2} \ \Rightarrow \ S_4(-1 \mid \frac{3}{2})$

Aufgabe 2

zu a) Schnittstellen von K_p und K_h:

$$\begin{aligned}
p(x) &= h(x) \quad \Big| -h(x)\\
p(x)-h(x) &= 0\\
\frac{2}{9}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{x-2}+1\right) &= 0\\
\frac{2}{9}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}-\frac{1}{x-2}-1 &= 0\\
\frac{2}{9}x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}-\frac{1}{x-2} &= 0 \quad \Big| \cdot(x-2)\\
\frac{2}{9}x^3-\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}x+1-1 &= 0\\
\frac{2}{9}x^3-\frac{8}{18}x^2-\frac{3}{18}x^2+\frac{2}{6}x-\frac{3}{6}x+1-1 &= 0\\
\frac{2}{9}x^3-\frac{11}{18}x^2-\frac{1}{6}x &= 0
\end{aligned}$$

Nach dem Satz vom Nullprodikt ist:

$$x_1=0 \quad \vee \quad \frac{2}{9}x^2-\frac{11}{18}x-\frac{1}{6}=0$$

Mit der Lösungsformel ist:

$$x_{2,3}=\frac{\frac{11}{18}\pm\sqrt{\left(\frac{11}{18}\right)^2-4\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)}}{\frac{4}{9}}=\frac{\frac{11}{18}\pm\sqrt{\frac{121}{324}+\frac{4}{27}}}{\frac{4}{9}}=\frac{\frac{11}{18}\pm\frac{13}{18}}{\frac{4}{9}}$$

$$x_2=3 \quad \vee \quad x_3=-\frac{1}{4}$$

Schnittpunkte:

$$h(0)=\frac{1}{2} \Rightarrow S_1(0\,|\,\frac{1}{2})$$

$$h(3)=2 \Rightarrow S_2(3\,|\,2)$$

$$h\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow S_1(0\,|\,\frac{5}{9})$$

zu b) Da

1. h hat an der Stelle $x=2$ eine Definitionslücke und es ist
   $x \underset{\text{von links}}{\rightarrow} 2 \Rightarrow h(x) \rightarrow -\infty$
   $x \underset{\text{von rechts}}{\rightarrow} 2 \Rightarrow h(x) \rightarrow \infty$
2. $h(-3)=\frac{4}{5}$ und $p(-3)=3$

daraus ergibt sich:

$p(x) > h(x)$ für $x < -\frac{1}{4}$ K_p verläuft oberhalb von K_h

$p(x) < h(x)$ für $-\frac{1}{4} < x < 0$ K_p verläuft unterhalb von K_h

$p(x) > h(x)$ für $0 < x < 2$ K_p verläuft oberhalb von K_h
$p(x) < h(x)$ für $2 < x < 3$ K_p verläuft unterhalb von K_h
$p(x) > h(x)$ für $3 < x$ K_p verläuft oberhalb von K_h

