Natürliche Exponentialfunktion

Um was geht es?

Gesucht ist eine Basis ◈ der Funktionsgleichung $f(x)=◈^x$, so dass die Tangente an K_f an der Stelle $x=0$ die y-Achse im Winkel von 45° schneidet (siehe nebenstehendes Schaubild).

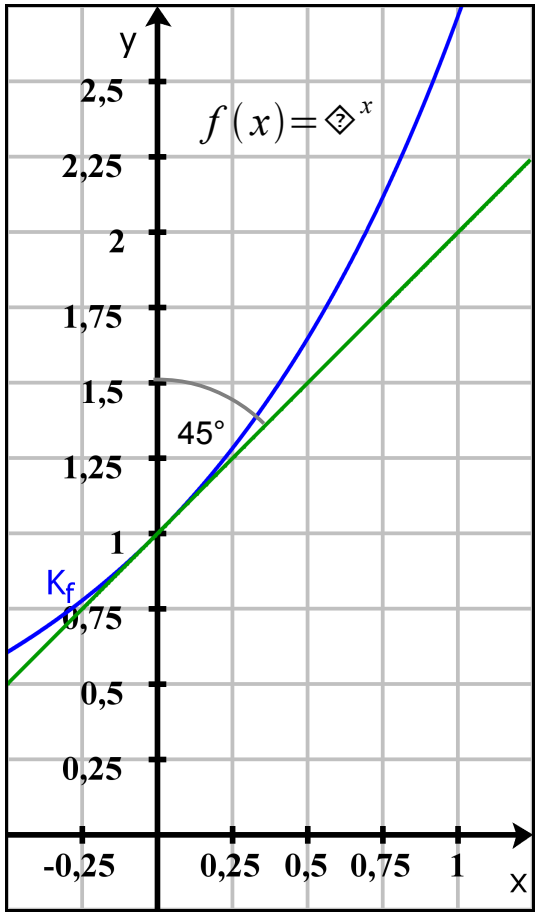
Abschätzen der Basis

1. Bestimmen Sie aus dem Schaubild die Gleichung der Tangente an K_f an der Stelle $x=0$.
2. Schätzen Sie mit Hilfe der Karten grob die Basis ◈ ab. **Tipp 1**

Lineare Approximation

1. Bestimmen Sie mit Hilfe des nebenstehenden Schaubilds die Differenz (auf zwei Nachkommastellen genau) zwischen den Funktionswerten von f und der Tangente an den folgenden Stellen: $x_1=0{,}25$, $x_2=0{,}5$, $x_3=0{,}75$ und $x_4=1$

   Hinweis: Beachten Sie die Skalierung!
2. Was passiert mit dem senkrechten Abstand zwischen Tangente und K_f an der Stelle x, wenn der Abstand zwischen x und Berührstelle größer wird?
3. Ermitteln Sie aus dem Schaubild den kleinsten Abstand zwischen x und der Berührstelle, für den ein Abstand zwischen Tangente und K_f noch erkennbar ist.



Skalierung: 1 cm ≙ 0,25 LE
⇒ gemessene Länge · 0,25

Zwischen der Berührstelle, der Tangente und dem soeben ermittelten x-Wert gilt:

$$f(x)=◈^x \approx t(x)$$

Diese Annäherung wird **lineare Approximation** genannt.

$f(x)=◈^x$ approximieren*

1. Sei f eine Funktion mit $f(x)=a^x$, $a>0$. Bestimmen Sie einen Wert x, für den die Basis gleichzeitig Funktionswert ist. **Tipp 2**
2. Bestimmen Sie für diesen x-Wert den senkrechten Abstand zwischen der Tangente und K_f (lineare Approximation). **Tipp 3**

Unsinn oder genial

Der vorherige Abschnitt zeigt, dass die Annäherung an ◈ durch die lineare Approximation zu ungenau ist. Daher ist ein Griff in die Zauberkiste nötig. Vervollständigen Sie die Lücken (graue Felder) in folgender Rechnung:

$$\square = \left(◈^{\frac{1}{1000}}\right)^{1000} \quad \leftarrow \text{Tipp 4}$$

Tipp 5 ↓ ↓ Tipp 6 ↓

$$f\left(\square\right) = ◈^{\frac{1}{1000}} \approx \square$$

(≈ lineare Aproximation)

Tipp 7 → ⇒ $◈ \approx$ □

Tipp 8 → $\approx$ □

Verbesserung der Annäherung

Vorhergehender Abschnitt hat gezeigt, dass $◈ = \left(◈^{\frac{1}{n}}\right)^n \approx \left(\frac{1}{n}+1\right)^n$

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen n und dem Fehler der Annäherung an ◈.

* Approximieren = Annähern

© 2012-2016 Henrik Horstmann