Eulersche Zahl

Um was geht es?

Gesucht ist eine Basis $\Diamond$ der Funktionsgleichung $f(x)=\Diamond^x$, so dass die Tangente an K_f an der Stelle $x=0$ die y-Achse im Winkel von 45° schneidet.

Station 1: Abschätzen der Basis

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K_f an der Stelle $x=0$.

<u>Lösung:</u> $t(x)=x+1$

Schätzen Sie mit Hilfe der Tafeln grob die Basis $\Diamond$ ab.

<u>Lösung:</u> $2{,}5<\Diamond<3$

Station 2: lineare Aproximation

Bestimmen Sie die Differenz (auf zwei Nachkommastellen genau) zwischen den Funktionswerten von K_f und der Tangente an folgenden Stellen: $x_1=0{,}25$, $x_2=0{,}5$, $x_3=0{,}75$ und $x_4=1$

<u>Hinweis:</u> Beachten Sie die Skalierung im Schaubild.

<u>Lösung:</u> $\delta_1\approx 0{,}03$, $\delta_2\approx 0{,}15$, $\delta_3\approx 0{,}37$ und $\delta_4\approx 0{,}72$

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen dem Abstand von x zum Berührpunkt und der Differenz der Funktionswerte.

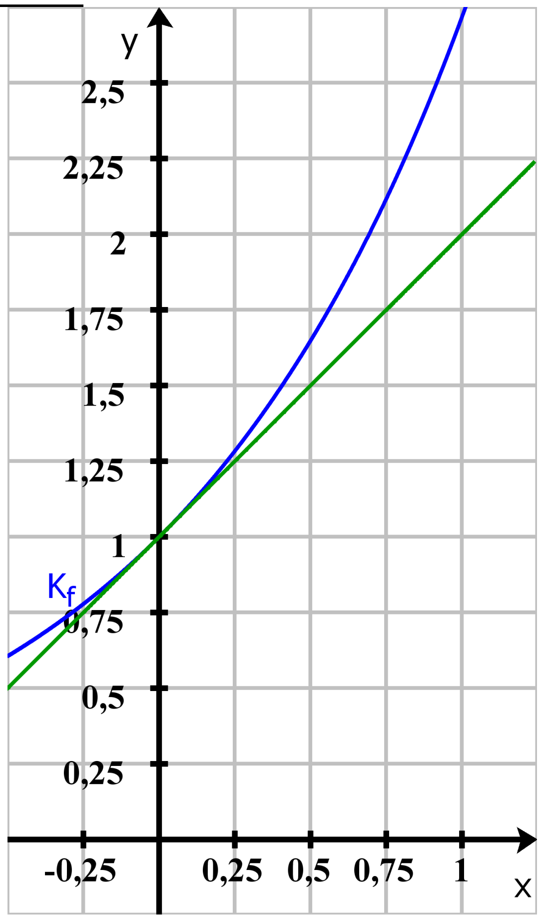
<u>Lösung:</u> Je größer der Abstand zwischen x und dem Ursprung, umso größer die Differenz der Funktionswerte.

Ermitteln Sie aus dem Schaubild den größten Wert für x, für den eine Differenz der Funktionswerte mit dem Augen nicht mehr erkennbar ist.

<u>Lösung:</u> x = $0{,}125$

Zwischen dem Berührpunkt der Tangente und so eben ermittelten x-Wert gilt:

$f(x)=\Diamond^x\approx t(x)$



Diese Annäherung wird lineare Approximation genannt.

Station 3: $f(x)=\Diamond^x$ approximieren

Sei f eine Funktion mit $f(x)=a^x$. Bestimmen Sie einen Wert x_b für den die Basis gleichzeitig Funktionswert ist.

<u>Lösung:</u> $f(x_b)=a^{x_b}=a \;\Rightarrow\; x_b=1$

Bestimmen Sie für diesen x-Wert und $f(x)=\Diamond^x$ den Fehler (=Differenz zwischen den Funktionswerten der Funktion und der Tangente) der linearen Approximation.

Lösung: Fehler $\delta \approx 0{,}72$

Station 4: Unsinn oder genial

Kennen wir den Funktionswert $f(x_b) = \text{�}$, so wären wir am Ziel. Station 3 zeigt, dass die Annäherung durch die lineare Approximation zu ungenau ist. Daher ist ein Griff in die mathematische Zauberkiste nötig. Vervollständigen Sie die Lücken in folgender Rechnung:

$$\underline{\text{�}} = \left(\text{�}^{\frac{1}{1000}}\right)^{1000}$$

$$\downarrow$$

$$f\left(\underline{\frac{1}{1000}}\right) = \text{�}^{\frac{1}{1000}} \underset{\text{lineare Approximation}}{\approx} \underline{\frac{1}{1000}+1}$$

$$\Rightarrow \text{�} \approx \underline{\left(\frac{1}{1000}+1\right)^{1000} \approx 2{,}7169}$$

Station 5: Verbesserung der Annäherung

Station 4 hat gezeigt, dass

$$\text{�} = \left(\text{�}^{\frac{1}{n}}\right)^{n} \approx \left(\frac{1}{n}+1\right)^{n}$$

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen n und dem Fehler der Annäherung an �.

Lösung: Je größer n ist, um so kleiner ist der Fehler der Annäherung.

