Exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse

Eine Flasche ist mit Wasser gefüllt, das eine Temperatur von 43,6 °C hat. Die Raumtemperatur beträgt 19,8 °C. In Intervallen von 5 Minuten wird die Wassertemperatur gemessen. Die Ergebnisse der Messungen sind in der folgende Tabelle angeben.

Zeit in Minuten	Temperatur des Wassers
0	43,6 °C
5	42,1 °C
10	41,5 °C
15	40,1 °C
20	39,5 °C
25	38,2 °C
30	37,8 °C

Um Fragen nach der weiteren Temperaturentwicklung beantworten zu können muss mit Hilfe der Messwerte eine Funktion modelliert werden, welche die Temperatur des Wassers in Abhängigkeit von der Zeit an gibt.

Modellieren

Zunächst einmal muss berücksichtigt werden, dass das Wasser maximal auf die Raumtemperatur abkühlen kann:

Zeit t	Temperatur des Wassers	Differenz zur Raumtemperatur
0	43,6 °C	43,6 °C – 19,8 °C = 23,8 °C
1	42,1 °C	42,1 °C – 19,8 °C = 22,3 °C
2	41,5 °C	41,5 °C – 19,8 °C = 21,7 °C
3	40,1 °C	40,1 °C – 19,8 °C = 20,3 °C
4	39,5 °C	39,5 °C – 19,8 °C = 19,7 °C
5	38,2 °C	38,2 °C – 19,8 °C = 18,4 °C
6	37,8 °C	37,8 °C – 19,8 °C = 18,0 °C

Als nächstes analysieren wir die Veränderung der Temperatur:

Zeit t	**Temperatur**	$\dfrac{\textbf{Temperatur}_{t+1}}{\textbf{Temperatur}_t}$
0	23,8 °C	
1	22,3 °C	0,937
2	21,7 °C	0,973
3	20,3 °C	0,935
4	19,7 °C	0,970
5	18,4 °C	0,934
6	18,0 °C	0,978

Im Mittel sinkt die Temperatur um den Faktor 0,955. Daraus ergibt sich:

Zum Zeitpunkt $t=0$ beträgt die Temperatur $f(0)=23{,}8\,°\text{C}+19{,}8\,°\text{C}$.

Zum Zeitpunkt $t=1$ lässt sich die Temperatur wie folgt berechnen: $f(1)=23{,}8°\text{C}\cdot 0{,}955+19{,}8\,°\text{C}$. Daraus ergibt sich auch die Berechnung für den Zeitpunkt $t=2$: $f(2)=23{,}8\,°\text{C}\cdot 0{,}955^2+19{,}8°\text{C}$.

Allgemein gilt damit: $f(t)=23{,}8°\text{C}\cdot 0{,}955^t+19{,}8\,°\text{C}$

Wachstums-/Zerfallsfunktion zur Basis e

Berechnungen mit der Wachtums-, bzw. Zerfallsfunktion lassen sich einfacher durchführen wenn die Exponentialfunktion zur Basis e ist:

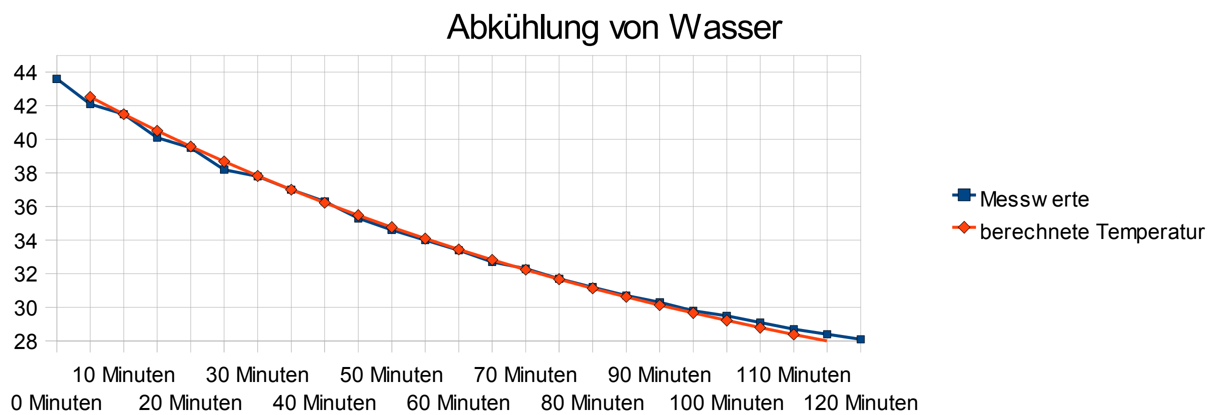
Es gilt: $0{,}955=\mathrm{e}^{\ln(0{,}955)}$

damit ist $f(t)=23{,}8°\text{C}\cdot\left(\mathrm{e}^{\ln(0{,}955)}\right)^t+19{,}8°\text{C}$

mit den Potenzsätzen ergibt sich: $f(t)=23{,}8°\text{C}\cdot \mathrm{e}^{\ln(0{,}955)t}+19{,}8\,°\text{C}$

mit $\ln(0{,}955)\approx -0{,}046$ ist $f(t)=23{,}8°\text{C}\cdot \mathrm{e}^{-0{,}046t}+19{,}8\,°\text{C}$ die gesuchte Funktion.

Folgendes Diagramm zeigt die tatsächlichen Messwerte (blaue Kurve) und die Temperaturwerte (rote Kurve), die sich aus der Zerfallsfunktion ergeben.



Temperatur zu einer bestimmten Zeit

Welche Temperatur hat das Wasser nach 1 Stunde?

Lösung:

1 Stunde $\widehat{=}$ 60 Minuten

Das Zeitintervall beträgt 5 Minuten $\Rightarrow$ $t = 60 \div 5 = 12$

Die Temperatur nach 60 Minuten beträgt somit

$$f(12) = 23{,}8\,°\mathrm{C} * \mathrm{e}^{-0{,}046 \cdot 12} + 19{,}8\,°\mathrm{C} = 33{,}5\,°\mathrm{C}$$

Die Zeit zu einer bestimmten Temperatur

Wie lange dauert es, bis das Wasser auf 30 °C abgekühlt ist?

Lösung:

Setze $f(t) = 30\,°\mathrm{C}$ und löse die Gleichung:

$$\begin{aligned}
23{,}8\,°\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}046\,t} + 19{,}8\,°\mathrm{C} &= 30\,°\mathrm{C} && \mid -19{,}8\,°\mathrm{C} \\
23{,}8\,°\mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}046\,t} &= 10{,}2\,°\mathrm{C} && \mid \div 23{,}8\,°\mathrm{C} \\
\mathrm{e}^{-0{,}046\,t} &= 0{,}4286 && \mid \ln \\
-0{,}046\,t &= \ln(0{,}4286) && \\
-0{,}046\,t &= -0{,}8472 && \mid \div(-0{,}046) \\
t &= 18{,}4 && \mid \div(-0{,}046)
\end{aligned}$$

Das Zeitintervall beträgt 5 Minuten $\Rightarrow$ $5 \cdot 18{,}4 = 92$

Nach 92 Minuten ist das Wasser auf 30 °C abgekühlt.