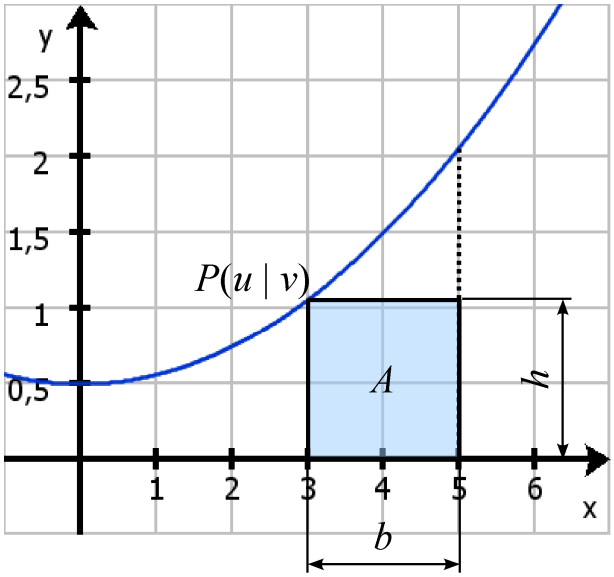
Optimieren

Beispiel: Rechteck

Sachverhalt



Die x-Achse, sowie die die Gerade $x = 5$ bilden die Seiten eines Rechtecks. Ein Eckpunkt $P(u \mid v)$ des Rechtecks liegt auf der Kurve K_f mit $f(x) = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}$.

Die Größe des Rechtecks wird durch den Term $A = b \cdot h$ beschrieben.

Dabei ist $b = 5 - u$ und

$h = v = f(u) = \frac{1}{16}u^2 + \frac{1}{2}$

(Nebenbedingungen)

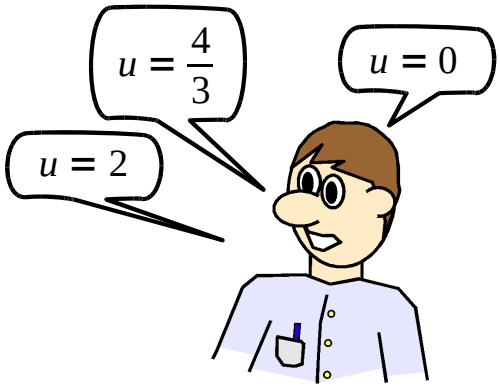
Aufgabe an den Wissenschaftler

Ein Wissenschaftler sucht nun ein $u \in [0; 5]$ für das die Fläche des Rechtecks so groß wie möglich ist. Dazu muss der Wissenschaftler als erstes eine Zielfunktion bestimmen und erhält von einem Kollege folgenden Tipp:

Helfen Sie dem Wissenschaftler die Zielfunktion mit Hilfe des Tipp zu finden.

(Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen auf der Lösungskarte 1)

Nun sucht der Wissenschaftler nach dem $u \in [0; 5]$, für das $A(u)$ maximal wird, also einen Hochpunkt besitzt. Dabei stößt er auf drei Werte:



Finden Sie heraus, welcher Wert richtig ist und Begründen Sie ihre Antwort schriftlich.

(Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen auf der Lösungskarte 2)

© 2009 Henrik Horstmann

Optimieren

Beispiel: Rechteck

Lösungskarte 1

Funktion bilden:

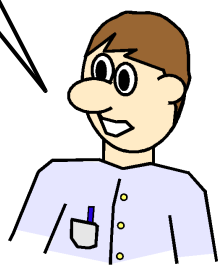
$$A(u) = b \cdot r$$

Funktion nach der Variable *u* auflösen:

$$\begin{aligned} A(u) &= b \cdot h \\ &= (5-u)\left(\frac{1}{16}u^2+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5}{16}u^2+\frac{5}{2}-\frac{1}{16}u^3-\frac{1}{2}u \\ &= -\frac{1}{16}u^3+\frac{5}{16}u^2-\frac{1}{2}u+\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Zielfunktion ist somit:

$$A(u) = -\frac{1}{16}u^3+\frac{5}{16}u^2-\frac{1}{2}u+\frac{5}{2}$$



 © 2009 Henrik Horstmann

Optimieren

Beispiel: Rechteck

Lösungskarte 2

Extrema bestimmen:

Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$A(u) = -\frac{1}{16}u^3+\frac{5}{16}u^2-\frac{1}{2}u+\frac{5}{2}$$

$$A'(u) = -\frac{3}{16}u^2+\frac{5}{8}u-\frac{1}{2}$$

$$A''(u) = -\frac{3}{8}u+\frac{5}{8}$$

Lösung: $u = 0$

Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:

Setze $A'(u) = 0$: mit der Lösungsformel ergibt sich

$u_1 = \frac{4}{3}$ und $u_2 = 2$

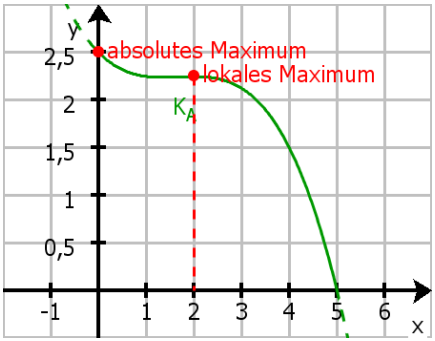
$A''\left(\frac{4}{3}\right) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $u_1 = \frac{4}{3}$

$A''(2) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $u_2 = 2$

Wie am Schaubild leicht zu erkennen ist, ist $A(u)$ für $u = 2$ nur ein lokales Maximum im Definitionsbereich $[0;5]$.

Das absolute Maximum nimmt $A(u)$ für $u \in [0;5]$ mit $u = 0$ an.

Für $u = 0$ ist somit die Rechteckfläche am größten.



 © 2009 Henrik Horstmann