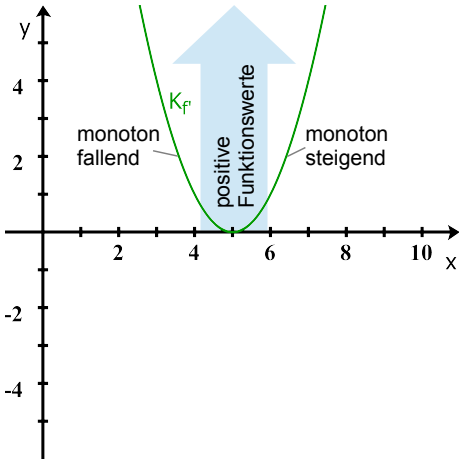
Schaubilder von Ableitungsfunktionen

Lösungsheft

Henrik Horstmann

Dieses Werk ist lizenziert unter einer
Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2011 Henrik Horstmann

Aufgabe 1



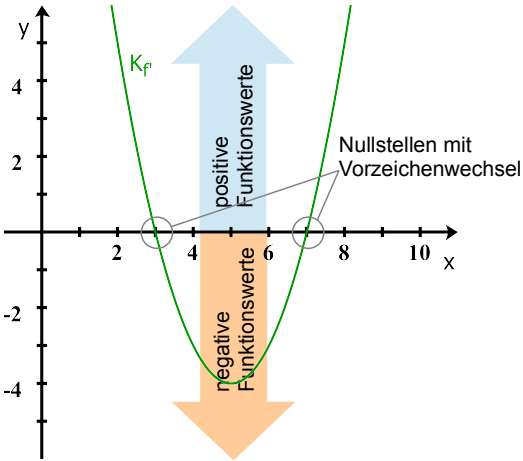
a) keine: zwar hat $K_{f'}$ an der Stelle $x=5$ eine Nullstelle, jedoch keinen Vorzeichenwechsel.

b) $K_{f'}$ ist für $x<5$ monoton fallend $\Rightarrow$ K_f ist für $x<5$ rechts gekrümmt. Für $5<x$ ist $K_{f'}$ monoton steigend $\Rightarrow$ K_f ist für $5<x$ linksgekrümmt. K_f ändert sein Krümmungsverhalten genau einmal $\Rightarrow$ K_f besitzt genau eine Wendestelle

c) $x=5$ ist die Wendestelle.

2011 Henrik Horstmann

Aufgabe 2



a) $K_{f'}$ besitzt zwei Nullstellen mit Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ K_f besitzt zwei Extremstellen.

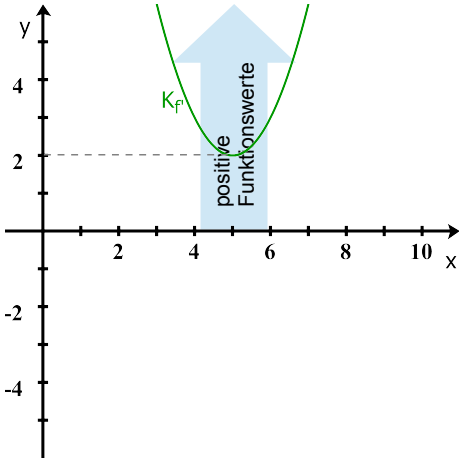
b) K_f hat an der Stelle $x=3$ einen Hochpunkt, da K_f für $x<3$ monoton wachsend und für $3<x<5$ monoton fallend ist.

c) K_f hat an der Stelle $x=7$ einen Tiefpunkt, da K_f für $3<x<5$ monoton fallend und für $5<x$ monoton steigend ist.

d) K_f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und für $x<3$ und $5<x$ monoton steigend $\Rightarrow$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$ und $x\to\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$, damit sind beide Extremstelen lokal.

2011 Henrik Horstmann

Aufgabe 3



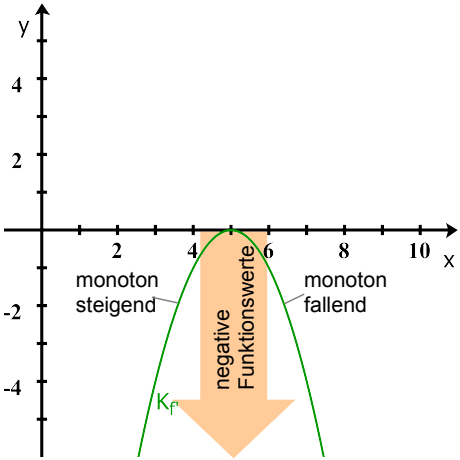
a) Es ist $f'(x)>0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ K_f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ monoton steigend.

b) Da K_f für alle $x \in \mathbb{R}$ monoton steigend ist, besitzt K_f keine Extremstellen.

c) $K_{f'}$ hat an der Stelle $x=5$ einen Monotonie Wechsel $\Rightarrow$ K_f hat an eine Wendestelle für $x=5$. Weitere Wendestellen hat K_f nicht, da $K_{f'}$ genau eine Extremstelle besitzt.

d) Durch Ablesen vom Schaubild $K_{f'}$: Steigung der Wendetangente ist $m=2$.

Aufgabe 4



a) Es ist $f'(x)<0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ und $f'(5)=0$ $\Rightarrow$ K_f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ monoton fallend.

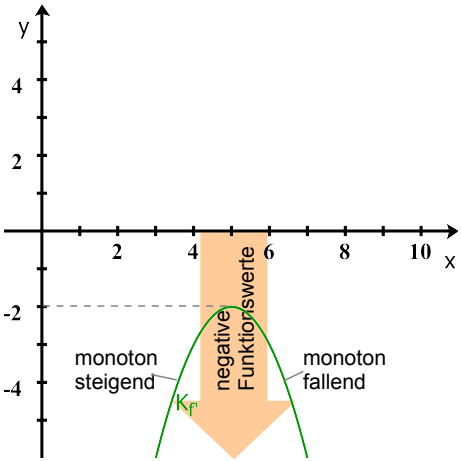
b) $K_{f'}$ ist für $x<5$ monoton steigend $\Rightarrow K_f$ ist für $x<5$ linksgekrümmt. Für $5<x$ ist $K_{f'}$ monoton fallend $\Rightarrow K_f$ ist für $5<x$ rechts gekrümmt.

c) $K_{f'}$ hat nur bei $x=5$ einen Monotonie Wechsel $\Rightarrow x=5$ ist einzige Wendestelle von K_f.

d) Durch Ablesen ergibt sich, dass $K_{f'}$ die Nullstelle $N(5|0)$ hat $\Rightarrow$ K_f hat an der Stelle $x=5$ eine waagerechte Tangente $\Rightarrow$ K_f hat an der Stelle $x=5$ einen Sattelpunkt.

2011 Henrik Horstmann

Aufgabe 5

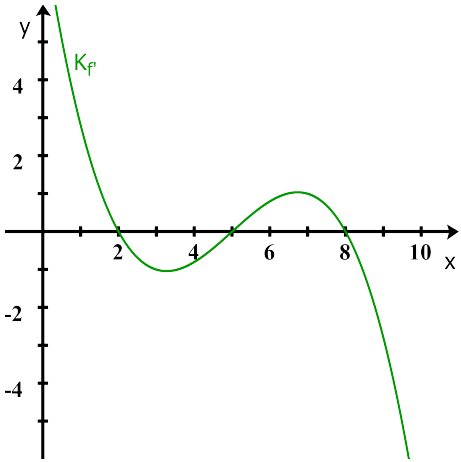


a) Es ist $f'(x)<0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ K_f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ streng monoton fallend $\Rightarrow$ K_f besitzt keine Extremstellen.

b) Für $x<5$ ist $K_{f'}$ monoton steigend $\Rightarrow$ für $x<5$ ist K_f linksgekrümmt. $K_{f'}$ ist für $x>5$ monoton fallend $\Rightarrow$ für $x>5$ ist K_f rechtsgekümmt. Damit besitzt K_f nur an der Stelle $x=5$ eine Wendestelle.

c) Durch Ablesen aus dem Schaubild ergibt sich $f'(5)=-2$ $\Rightarrow$ die Wendetangente hat die Steigung $m=-2$.

Aufgabe 6



a) An den Stellen $x_1=2$ und $x_3=8$ hat K_f Hochpunkte, da $K_{f'}$ an diesen Stellen eine negative Steigung hat $(f''(2)<0 \wedge f''(8)<0)$. An der Stelle $x_2=5$ hat $K_{f'}$ eine positive Steigung ($f''(5)>0$) und somit K_f einen Tiefpunkt.

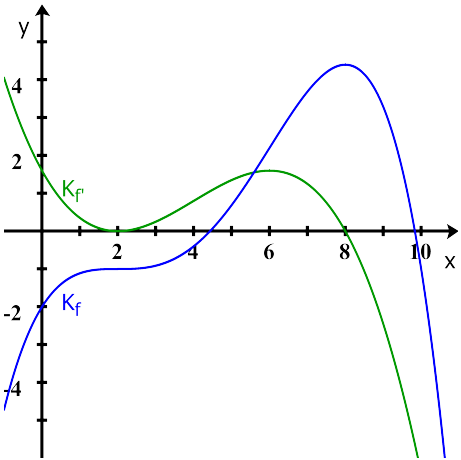
b) Der Tiefpunkt ist lokal, denn für $x<2$ gilt $x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$.

c) $K_{f'}$ hat zwei Extrema $\Rightarrow K_f$ hat zwei Wendestellen.

d) Die Extrempunkte von $K_{f'}$ sind keine Nullstellen $\Rightarrow$ Steigung in den Wendepunkten $\neq 0$.

2011 Henrik Horstmann

Aufgabe 7

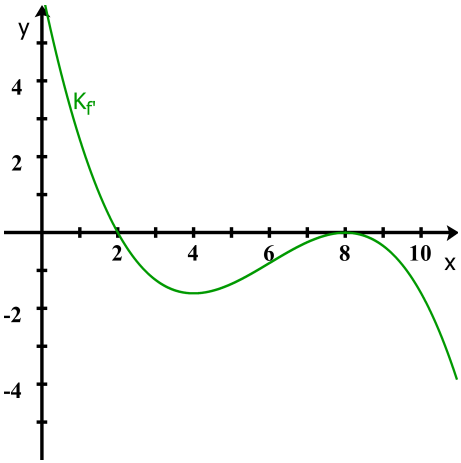


a) K_f hat einen Hochpunkt an der Stelle $x=8$.
An der Stelle $x=2$ hat K_f keine Extremstelle, da $f'(x)$ hier kein Vorzeichenwechsel hat.

b) $K_{f'}$ hat zwei Extremstellen $\Rightarrow$ K_f hat zwei Wendestellen. Da eine der Extremstellen von $K_{f'}$ eine Nullstelle ist $\Rightarrow$ eine Wendetangente von K_f ist waagerecht $\Rightarrow$ eine der beiden Wendepunkte ist ein Sattelpunkt.

c) siehe oben

Aufgabe 8

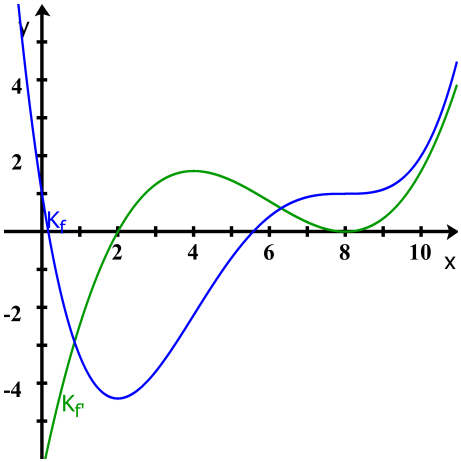


a) Für $x<2$ ist $f'(x)>0$ $\Rightarrow$ K_f ist für $x<2$ monoton steigend $\Rightarrow$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$.
Für $2<x$ ist $f'(x)\leq 0$ $\Rightarrow$ K_f ist für $2<x$ monoton fallend $\Rightarrow$ $x\to\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$.
Damit hat K_f an der Stelle $x=2$ ein globales Maximum.

b) Es ist zwar $f'(8)=0$, aber an der Stelle $x=8$ ist hat $f'(x)$ kein Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ $x=8$ ist keine Extremstelle.

2011 Henrik Horstmann

Aufgabe 9

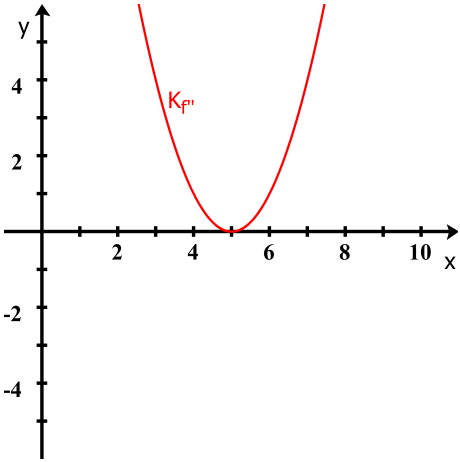


a) Für $x<2$ ist $f'(x)<0$ $\Rightarrow$ K_f ist für $x<2$ monoton fallend. Für $2<x$ ist $f'(x)\geq 0$ $\Rightarrow$ K_f ist für $2<x$ monoton steigend.

b) Im Intervall $]2;\infty[$ hat $K_{f'}$ an der Stelle $x=8$ ein globales Minimum $\Rightarrow$ K_f hat an der Stelle $x=8$ die geringste lokale Änderungsrate.

c) siehe oben.

Aufgabe 10



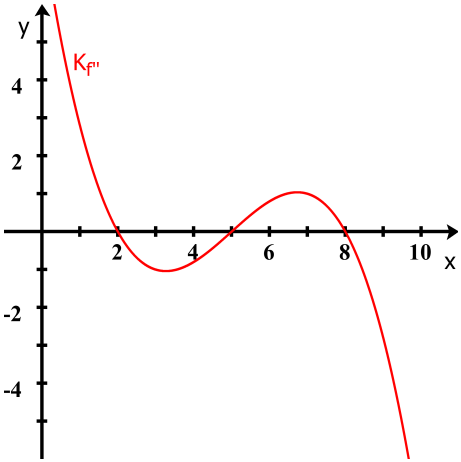
a) Es ist $f''(x) \geq 0$ für alle x $\Rightarrow$ $K_{f'}$ ist überall monoton steigend $\Rightarrow$ K_f ist auf dem ganzen Definitionsbereich linksgekrümmt.

b) Es ist $f''(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$ und nur $f''(5) = 0$ $\Rightarrow$ $K_{f'}$ ist streng monoton steigend $\Rightarrow$ $K_{f'}$ hat genau eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ K_f hat genau eine Extremstelle.

c) Da $K_{f'}$ streng monoton steigend ist hat $K_{f'}$ an der Nullstelle eine positive Steigung $\Rightarrow$ K_f hat ein Minimum.

2011 Henrik Horstmann

Aufgabe 11



a) $K_{f''}$ hat in allen Nullstellen eine Steigung $\neq 0$ $\Rightarrow$ $K_{f'}$ hat drei Extremstellen $\Rightarrow$ das Monotonieverhalten von $K_{f'}$ ändert sich drei mal $\Rightarrow$ das Krümungsverhalten von K_f ändert sich drei mal $\Rightarrow$ K_f besitzt drei Wendestellen.

b) $f''(x)$ ist eine ganzrat. Funktion 3. Grades $\Rightarrow f'(x)$ ist eine ganzrat. Funktion 4. Grades. Da eine vertikale Verschiebung von $K_{f'}$ keine Auswirkungen auf $f'(x)$ hat, gibt es ein $f'(x)$, dass keine Nullstellen und die zugehörige Funktion f keine Extremstellen besitzt.

2011 Henrik Horstmann