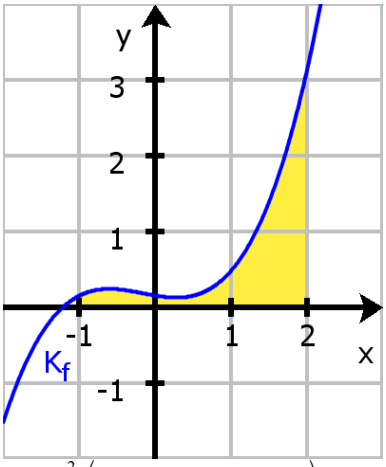
Lösungen zu Integralrechnung (Flächenberechnung)

a) Sei K_f das Schaubild der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}$

Bestimmen Sie den exakte Flächeninhalt der Fläche, die von der Kurve K_f, der x-Achse und den Geraden $x=-1$ und $x=2$ eingeschlossen wird.

Lösung:



$$A=\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{6}x\right]_{-1}^{2}$$
$$=2\,\text{FE}$$

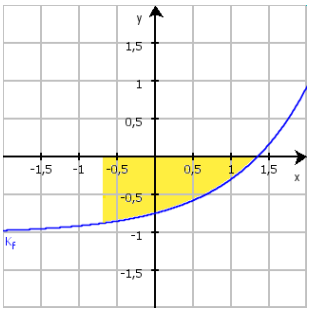
b) Aufgabentext...

Lösung:

Lösungstext...

a) Sei K_f das Schaubild der Funktion f mit $f(x)=e^{x-\frac{4}{3}}-1$ Bestimmen Sie den exakte Flächeninhalt der Fläche, die von der Kurve K_f, der x-Achse und der Geraden $x=-\frac{2}{3}$ eingeschlossen wird.

Lösung:



Nullstellen berechnen:

© 2011 Henrik Horstmann

Setze $f(x)=0$:

$$\begin{aligned} e^{x-\frac{4}{3}}-1 &= 0 \quad | +1 \\ e^{x-\frac{4}{3}} &= 1 \quad | \ln \\ x-\frac{4}{3} &= \ln(1) \quad | +\frac{4}{3} \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

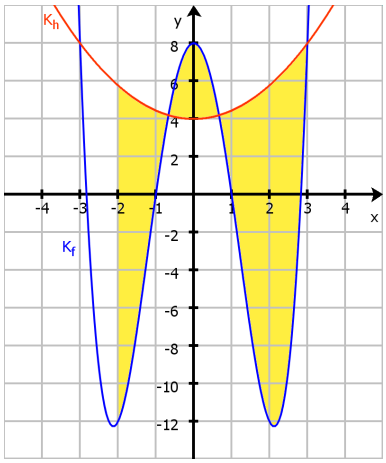
$$N\left(\frac{4}{3} \mid 0\right)$$

$$\begin{aligned} A &= -\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \left(e^{x-\frac{4}{3}}-1\right)dx \\ &= -\left[e^{x-\frac{4}{3}}-x\right]_{-\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} \\ &= -\left(e^{0}-\frac{4}{3}-\left(e^{-2}+\frac{2}{3}\right)\right) \\ &= 1+e^{-2}\,\text{FE} \end{aligned}$$

b) Sei K_f das Schaubild der Funktion f mit $f(x)=x^4-9x^2+8$ und K_h das Schaubild der Funktion h mit $h(x)=\frac{4}{9}x^2+4$.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von den Kurve K_f und K_h und den Geraden $x=-2$ und $x=3$ eingeschlossen wird.

Lösung:



Berechne die Schnittpunkte von K_f und K_h

$$\begin{aligned} x^4-9x^2+8 &= \frac{4}{9}x^2+4 \quad \left| -\frac{4}{9}x^2-4 \right. \\ x^4-\frac{85}{9}x^2+4 &= 0 \quad | \text{ Substitution: } x^2 \to u \\ u^2-\frac{85}{9}u+4 &= 0 \end{aligned}$$

Setze $a=1,\ b=-\frac{85}{9},\ c=4$ in die Lösungsformel ein:

$$u_{1,2} = \frac{\frac{85}{9} \pm \sqrt{\left(-\frac{85}{9}\right)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}$$

$$u_1 = 9 \quad u_2 = \frac{4}{9}$$

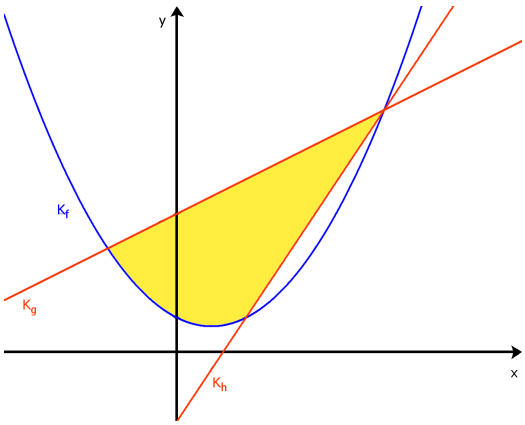
Rücksubstitution: $u \to x^2$

$$u_1 \to x_{1,2} = \pm 3 \qquad u_2 \to x_{3,4} = \pm\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{-\frac{2}{3}} \left(-x^4+\frac{85}{9}x^2-4\right)dx \\ &+ \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(x^4-\frac{85}{9}x^2+4\right)dx \\ &+ \int_{\frac{2}{3}}^{3} \left(-x^4+\frac{85}{9}x^2-4\right)dx \\ &= 12{,}5454 \\ &+ 3{,}5204 \\ &+ 26{,}1602 \\ &= 42{,}226\,\text{FE} \end{aligned}$$

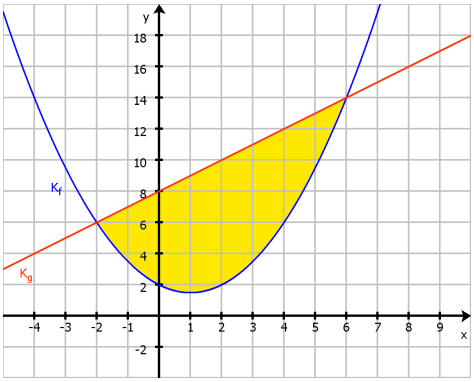
© 2011 Henrik Horstmann

b) Berechnen Sie den exakten Flächeninhalt der markierten Fläche:



$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$
$$g(x) = x + 8$$
$$h(x) = 3x - 4$$

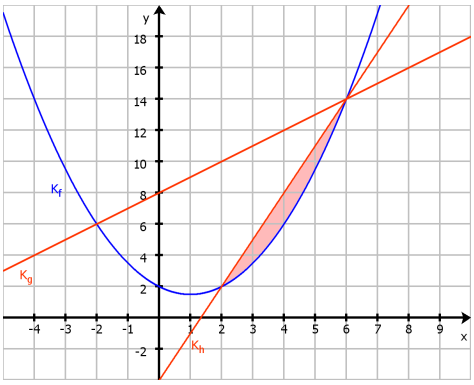
Lösung:



Berechnung der Schnittstellen von K_f und K_g:
$x_1 = -2, \quad x_2 = 6$

Berechnung des Flächeninhalts zwischen K_f und K_g:

$$A_1 = \int_{-2}^{6} \left(x + 8 - \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 2 \right) \right) dx = \int_{-2}^{6} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 \right) dx$$
$$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 6x \right]_{-2}^{6} = \frac{128}{3}\,\text{FE}$$



Berechnung der Schnittstellen von K_f und K_h:
$x_1 = 2, \quad x_2 = 6$

Berechnung des Flächeninhalts zwischen K_f und K_h:

$$A_2 = \int_{2}^{6} \left(3x - 4 - \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 2 \right) \right) dx = \int_{-2}^{6} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 \right) dx$$
$$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - 6x \right]_{2}^{6} = \frac{16}{3}\,\text{FE}$$

Berechnung des gesuchten Flächeninhalts: $A = A_1 - A_2 = \frac{128}{3} - \frac{16}{3} = \frac{112}{3}\,\text{FE}$

© 2011 Henrik Horstmann