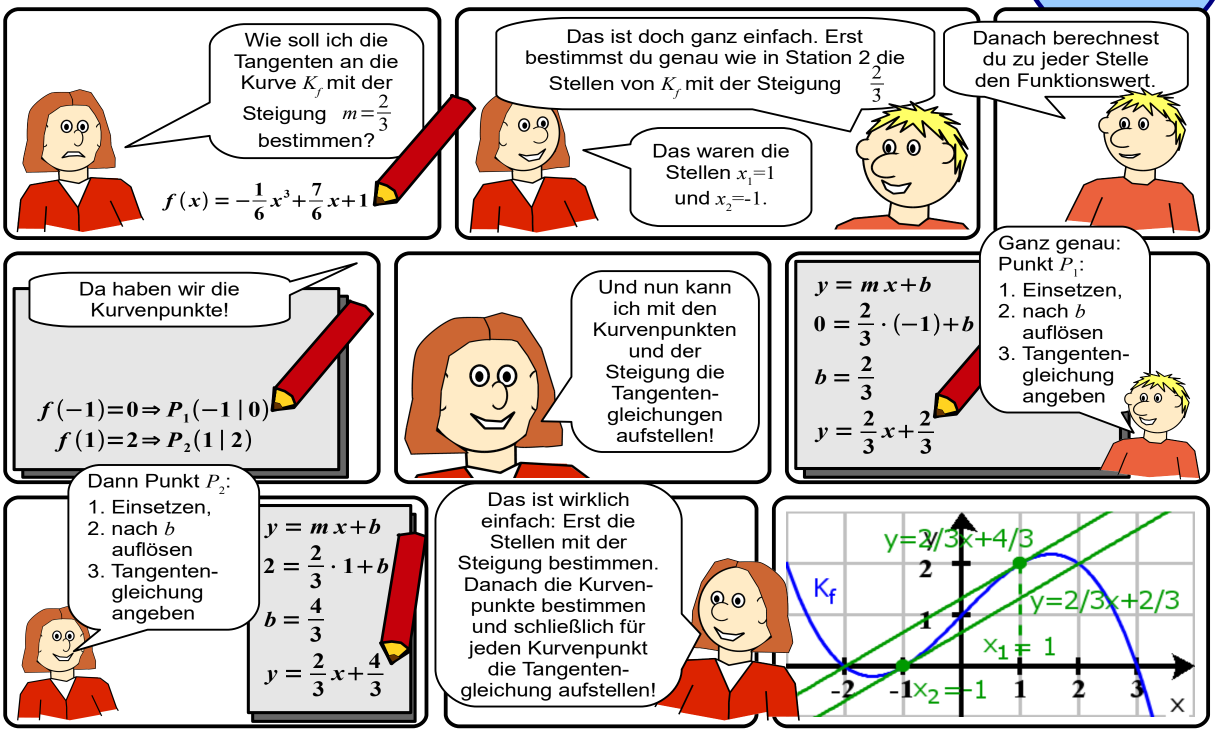
Katy bestimmt Tangenten mit vorgegebener Steigung

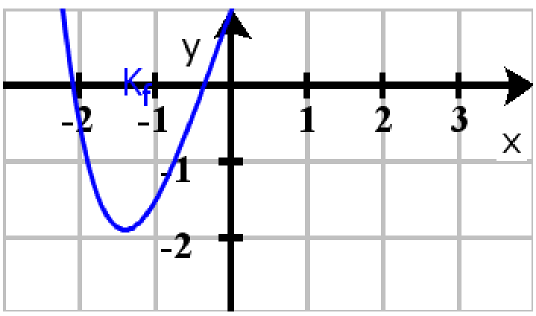
4



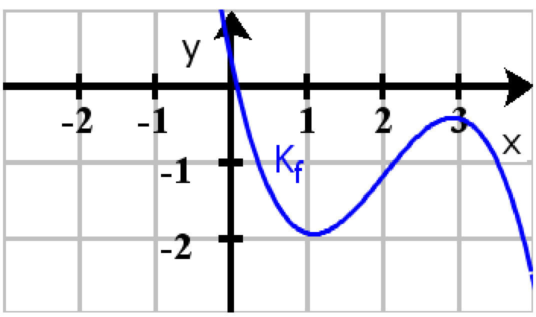
Aufgaben

Zeichnen Sie das Schaubild ab. Bestimmen Sie die Tangenten mit der vorgegebenen Steigung und zeichnen Sie diese in das Schaubild ein.

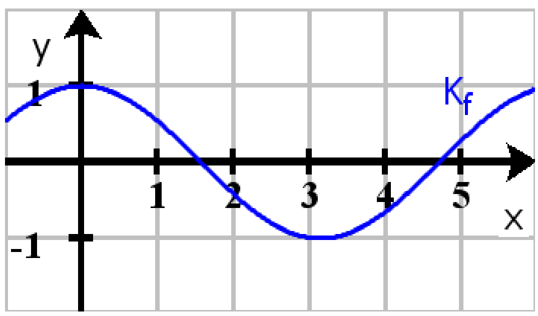
1) $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{11}{4}x+1\,;\ m=\frac{7}{4}$



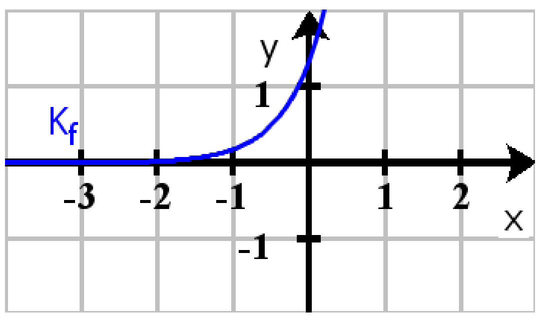
2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+3x^2-\frac{19}{4}x+\frac{1}{3}\,;\ m=-\frac{1}{4}$



3) $f(x)=\cos(x)\,;\ m=-\frac{1}{2}\,;\ 0<x<5$



4) $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}\,;\ m=1$



1) $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{11}{4}x+1\;;\;m=\frac{7}{4}$

Bestimme die Stellen, an denen die Funktion f

die Steigung $m=\frac{7}{4}$ hat:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4+\frac{11}{4}x+1$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^3+\frac{11}{4}$$

Setze $m = f'(x)$

$$\begin{aligned}
x^3+\frac{11}{4} &= \frac{7}{4} && |\cdot 4\\
4x^3+11 &= 7 && |-11\\
4x^3 &= -4 && |\div 4\\
x^3 &= -1 && |\sqrt[3]{\;}\\
x &= \sqrt[3]{-1}\\
x &= -1
\end{aligned}$$

Tangente an der Stelle $x_1=-1$:
y-Achsenabschnitt der Tangente:
Die Tangente berührt die Kurve an der Stelle x_1

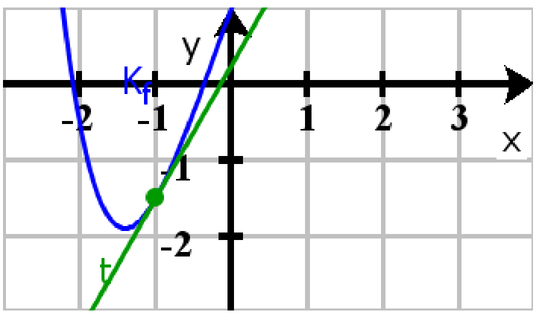
$$\Rightarrow t_1(-1) = (-1) = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow t_1(-1) = -\frac{3}{2} = \frac{7}{4}\cdot(-1)+b$$

$$\Rightarrow b = -\frac{3}{2}-\left(\frac{7}{4}\cdot(-1)\right) = \frac{1}{4}$$

Funktionsgleichung der Tangente:

$$t_1(x) = \frac{7}{4}x+\frac{1}{4}$$



2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+3x^2-\frac{19}{4}x+\frac{1}{3}\;;\;m=-\frac{1}{4}$

Bestimme die Stellen, an denen die Funktion f

die Steigung $m=-\frac{1}{4}$ hat:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3+3x^2-\frac{19}{4}x+\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}x^2+6x-\frac{19}{4}$$

Setze $m = f'(x)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad -\frac{3}{2}x^2+6x-\frac{19}{4} &= -\frac{1}{4} && |\cdot 4\\
\Rightarrow\quad -6x^2+24x-19 &= -1 && |+1\\
\Rightarrow\quad -6x^2+24x-18 &= 0
\end{aligned}$$

Setze $a=-6,\; b=24,\; c=-18$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
x_{(1,2)} &= \frac{-24\pm\sqrt{(24)^2-4\cdot(-6)\cdot(-18)}}{2\cdot(-6)}\\
&= \frac{-24\pm\sqrt{576-432}}{-12}\\
&= \frac{-24\pm\sqrt{144}}{-12}\\
&= \frac{-24\pm 12}{-12}\\
x_1 &= 1\\
x_2 &= 3
\end{aligned}$$

Tangente an der Stelle $x_1=1$:
y-Achsenabschnitt der Tangente:
Die Tangente berührt die Kurve an der Stelle x_1

$$\Rightarrow t_1(1) = f(1) = -\frac{23}{12}$$

$$\Rightarrow t_1(1) = -\frac{23}{12} = -\frac{1}{4}\cdot 1+b$$

$$\Rightarrow b = -\frac{23}{12}-\left(-\frac{1}{4}\cdot 1\right) = -\frac{5}{3}$$

Funktionsgleichung der Tangente:

$$t_1(x) = -\frac{1}{4}x-\frac{5}{3}$$

Tangente an der Stelle $x_2 = 3$:
y-Achsenabschnitt der Tangente:
Die Tangente berührt die Kurve an der Stelle x_2

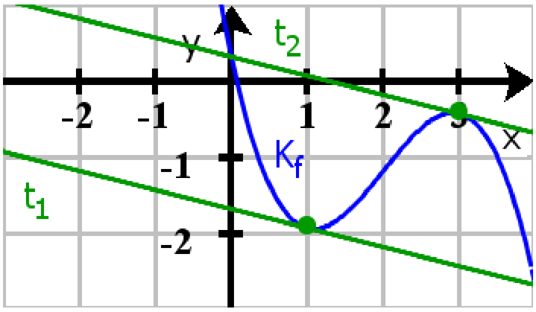
$$\Rightarrow t_2(3) = f(3) = -\frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow t_2(3) = -\frac{5}{12} = -\frac{1}{4} \cdot 3 + b$$

$$\Rightarrow b = -\frac{5}{12} - \left(-\frac{1}{4} \cdot 3\right) = \frac{1}{3}$$

Funktionsgleichung der Tangente:

$$t_2(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}$$



3) $f(x) = \cos(x)$; $m = -\frac{1}{2}$; $0 < x < 5$

Bestimme die Stellen, an denen die Funktion f

die Steigung $m = -\frac{1}{2}$ hat:

$$f(x) = \cos(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

Setze $m = f'(x)$

$$\Rightarrow -\sin(x) = -\frac{1}{2} \quad | \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{6}\pi \approx 0{,}52 \quad x_2 = \frac{5}{6}\pi \approx 2{,}62$$

Tangente an der Stelle $x_1 = \frac{1}{6}\pi$:

y-Achsenabschnitt der Tangente:
Die Tangente berührt die Kurve an der Stelle x_1

$$\Rightarrow t_1\left(\frac{1}{6}\pi\right) = f\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}86$$

$$\Rightarrow t_1\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\pi\right) + b$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\pi\right) \approx 1{,}13$$

Funktionsgleichung der Tangente:

$$t_1(x) = -0{,}5x + 1{,}13$$

Tangente an der Stelle $x_2 = \frac{5}{6}\pi$:

y-Achsenabschnitt der Tangente:
Die Tangente berührt die Kurve an der Stelle x_2

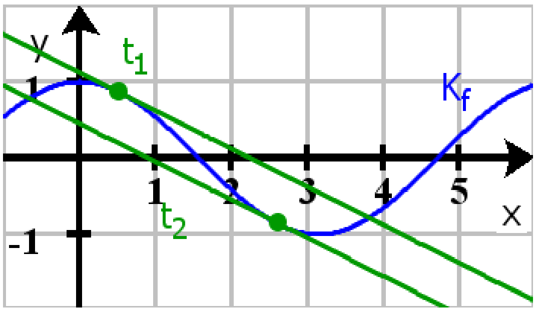
$$\Rightarrow t_2\left(\frac{5}{6}\pi\right) = f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}86$$

$$\Rightarrow t_2\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\pi\right) + b$$

$$\Rightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\pi\right) \approx 0{,}44$$

Funktionsgleichung der Tangente:

$$t_2(x) = -0{,}5x + 0{,}44$$



4) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$; $m = 1$

Bestimme die Stellen, an denen die Funktion f
die Steigung $m = 1$ hat:

$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$

$\Rightarrow f'(x) = e^{2x+1}$

Setze $m = f'(x)$

$$\begin{array}{lrcll} \Rightarrow & e^{2x+1} & = & 1 & \mid \ln \\ \Rightarrow & 2x+1 & = & 0 & \mid -1 \\ \Rightarrow & 2x & = & -1 & \mid \div 2 \\ \Rightarrow & x & = & -\frac{1}{2} & \end{array}$$

Tangente an der Stelle $x = -\frac{1}{2}$:

y-Achsenabschnitt der Tangente:
Die Tangente berührt die Kurve an der Stelle x_1

$\Rightarrow t\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow t\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + b$

$\Rightarrow b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Funktionsgleichung der Tangente:
$t(x) = x+1$