Gegenseitige Lage von Ebenen

Wie ging das noch?

Gegenseitige Lage von Ebenen

Tipp 1

E und g sind eine beliebige Ebene und Gerade, z.B.

$$E:\ 2x_1+3x_3+4x_3=40$$

und $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0{,}5\end{pmatrix}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3+r\\6\\2+0{,}5r\end{pmatrix}$

in die Ebenengleichung einsetzen:

$$2(3+r)+3\cdot6+4(2+0{,}5r)=40\Rightarrow6+2r+18+8+2r=40\quad\Rightarrow4r=8$$

$$\Rightarrow r=2$$

in $\vec{x}$ einsetzen: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3+2\\6\\2+0{,}5r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\\3\end{pmatrix}\Rightarrow S(5|6|3)$

Statt bei der Geradengleichung von g wird nun die rechte Seite der Ebenengleichung von E_2 zu einem Vektor zusammengefasst und die Koordinaten in die Koordinatengleichung von E_1 eingesetzt.

Gegenseitige Lage von Ebenen

Lösung 1

$E_1:\ a\cdot x_1+b\cdot x_2+c\cdot x_3=d$ ist die eine Ebene und

$$E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$ ist die andere Ebene.

$\begin{pmatrix}p_1+r\cdot u_1+s\cdot v_1\\p_2+r\cdot u_2+s\cdot v_2\\p_3+r\cdot u_3+s\cdot v_3\end{pmatrix}$ sind Ortsvektoren der Punkte in E_2. Setze den allgemeinen Ortsvektor in die Gleichung von E_1 ein um gemeinsame Punkte von E_1 und E_2 zu bestimmen:

$$a(p_1+r\cdot u_1+s\cdot v_1)+b(p_2+r\cdot u_2+s\cdot v_2)+c(p_3+r\cdot u_3+s\cdot v_3)=d$$

und löse nach s auf. Abschließend den Term für s in die Gleichung von E_2 einsetzen und die Gleichung der Schnittgerade berechnen.

Beispiel: $E_1:\ x_2+x_3=7$, $E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{x}=\begin{pmatrix}2-3r-s\\4\\3+2r+s\end{pmatrix}$ in die Gleichung von E_1 einsetzen:

$$4+3+2r+s=7$$

nach s auflösen: $7+2r+s=7\ \Rightarrow\ s=-2r$

in E_2 einsetzen: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}-2r\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Schnittgerade von E_1 und E_2: $g:\ \vec{x}=x=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$

Gegenseitige Lage von Ebenen

Lösung 2

(a) E_1 und E_2 schneiden sich

(b) E_1 und E_2 sind parallel

(c) E_1 und E_2 sind identisch