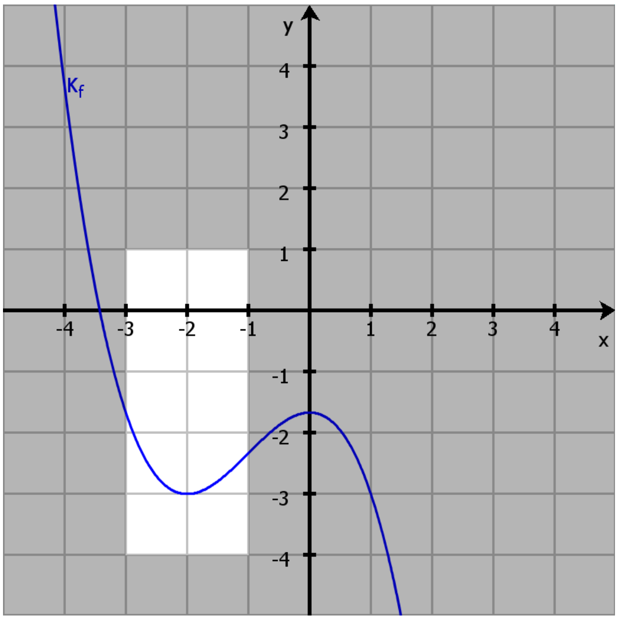
Extremstellen

Im folgenden sollen die Stellen einer Funktion genauer betrachtet werden, an denen das Schaubild der Funktion eine waagerechte Tangente besitzt.

Beispiel:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{5}{3}$$



In dem markierten Bereich hat das Schaubild der Funktion f an der Stelle $x_0 = -2$ eine waagerechte Tangente. Für alle anderen Stellen x aus dem markierten Bereich (Intervall) $(-3 < x < -1)$ gilt offensichtlich $f(x) \geqslant f(x_0)$. $f(x_0)$ liefert in dem markierten Bereich (Intervall) den niedrigsten Funktionswert. Daher wird $T\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$ als **Tiefpunkt** bezeichnet.

Gilt in einem Bereich um x_0, $f(x) \leqslant f(x_0)$ für alle x aus dem Bereich (Intervall), so wird $H\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$ als Hochpunkt bezeichnet.

Rechnerischer Nachweis von Extremstellen

Durch die Berechnung der Nullstellen der Ableitungsfunktion werden alle Stellen lokalisiert, an denen das Schaubild der Funktion waagerechte Tangenten besitzt. Das reicht jedoch nicht, um festzustellen, ob es sich um Hoch- oder Tiefpunkte handelt. Es wird ein weiteres Kriterium benötigt:

Merke:

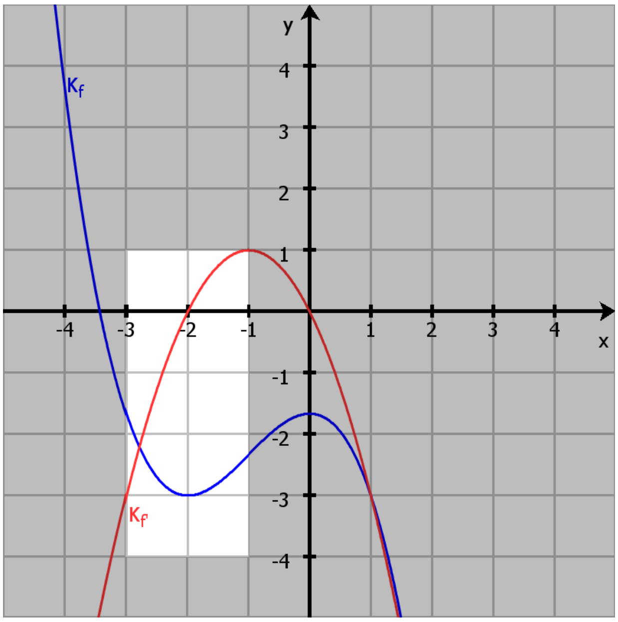
Sie x_0 eine Stelle, an der das Schaubild der Funktion von f eine waagerechte Tangente besitzt.

An der Stelle x_0 ist ein Tiefpunkt, wenn die Steigung von f an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ hat.

An der Stelle x_0 ist ein Hochpunkt, wenn die Steigung von f an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ hat.

Wann liegt ein Vorzeichenwechsel der Steigung einer Funktion vor?

Betrachte dazu am obigen Beispiel den Graphen der ersten Ableitungsfunktion:

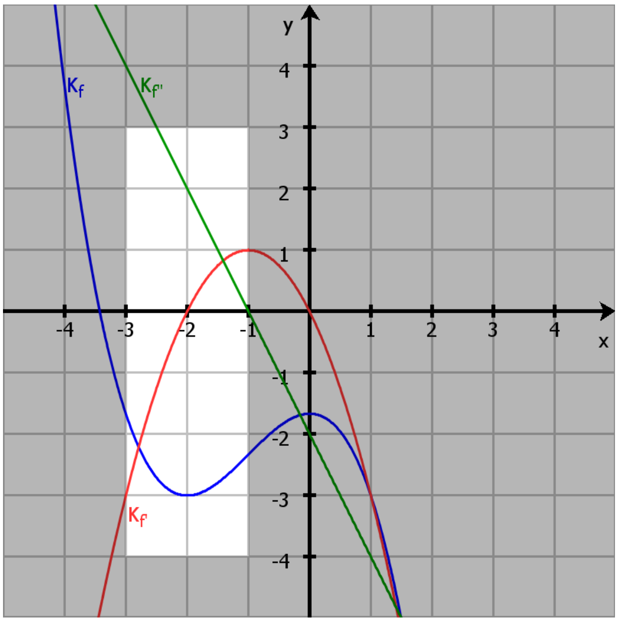


An der Nullstelle findet der Vorzeichenwechsel statt. Der Graph kommt aus dem Bereich unterhalb der x-Achse und geht in den Bereich oberhalb der x-Achse. Das bedeutet, Der Graph der Ableitungsfunktion besitzt an der Nullstelle eine positive Steigung.

Daraus lässt sich Ableiten: hat die Ableitungsfunktion an einer Nullstelle eine positive Steigung, dann hat das Schaubild der betrachteten Funktion an dieser Stelle einen Tiefpunkt. Umgekehrt gilt: hat die Ableitungsfunktion an einer Nullstelle eine negative Steigung, dann hat das Schaubild der betrachteten Funktion an dieser Stelle einen Hochpunkt.

Wie lässt sich feststellen, ob die Ableitungsfunktion an einer Nullstelle eine positive, bzw. negative Steigung besitzt.

Betrachte die Ableitungsfunktion der Ableitungsfunktion:

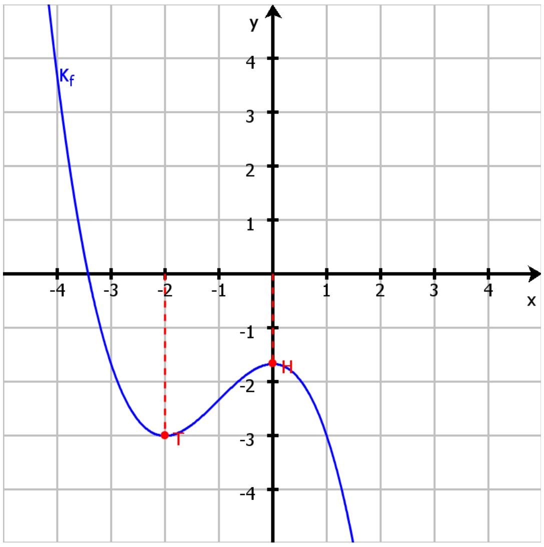


Merke:		
Tiefpunkt	Hochpunkt	
$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0$	*Notwendige Bedingung*
$f''(x) > 0$	$f''(x) < 0$	*Hinreichende Bedingung*

Beispiele:

a) Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{5}{3}$.
Zeichnen Sie ein Schaubild mit dem Graphen von f und den Extrempunkten.

Lösung:



Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{5}{3} \\ f'(x) &= -x^2 - 2x \\ f''(x) &= -2x - 2 \end{aligned}$$

Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $f'(x) = 0$:
$-x^2 - 2x = 0$ ausklammern von x:
$x(-x - 2) = 0$

$\underset{\text{Satz vom Nullprodukt}}{\Rightarrow}$ $x_1 = 0$ oder $-x - 2 = 0$

$$\begin{aligned} -x - 2 &= 0 \quad &\mid +2 \\ -x &= 2 \quad &\mid \div(-1) \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $x = 0$:
$f''(0) = -2$
$f''(0) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x = 0$
$f(0) = -\frac{5}{3} \Rightarrow H\left(0 \;\middle|\; -\frac{5}{3}\right)$

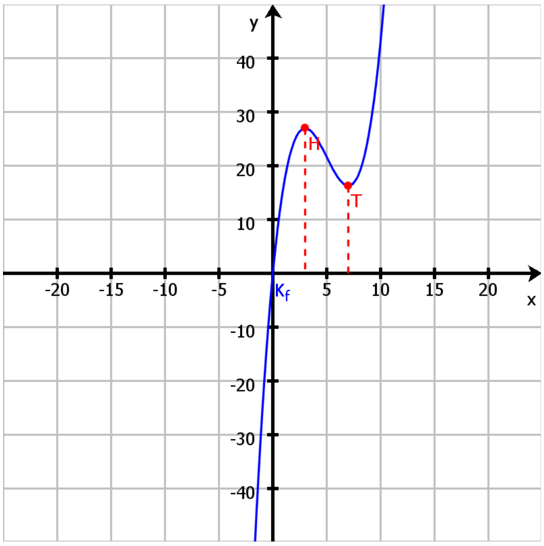
Untersuche die Stelle $x = -2$:
$f''(-2) = 2$
$f''(-2) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $x = -2$
$f(-2) = -3 \Rightarrow T(-2 \mid -3)$

b) Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 21x$.
Zeichnen Sie ein Schaubild mit dem Graphen von f und den Extrempunkten.

<u>Lösung:</u>

Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 21x \\ f'(x) &= x^2 - 10x + 21 \\ f''(x) &= 2x - 10 \end{aligned}$$



Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $f'(x) = 0$:
setze $a = 1,\ b = -10,\ c = 21$
in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 21}}{2} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2} \\ &= \frac{10 \pm 4}{2} \\ x_1 &= 7 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $x = 7$:

$f''(7) \;=\; 4$

$f''(7) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $x = 7$

$f(7) = \frac{49}{3} \Rightarrow T\left(7 \;\middle|\; \frac{49}{3}\right)$

Untersuche die Stelle $x = 3$:

$f''(3) \;=\; -4$

$f''(3) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x = 3$

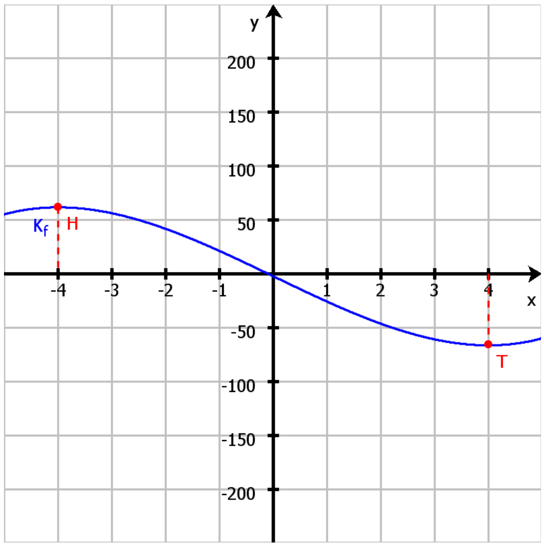
$f(3) = 27 \Rightarrow H(3 \mid 27)$

c) Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^3 - 24x - 2$. Zeichnen Sie ein Schaubild mit dem Graphen von f und den Extrempunkten.

Lösung:

Die Funktion und alle benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0{,}5x^3 - 24x - 2 \\ f'(x) &= 1{,}5x^2 - 24 \\ f''(x) &= 3x \end{aligned}$$



Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 1{,}5x^2 - 24 &= 0 && \mid +24 \\ 1{,}5x^2 &= 24 && \mid \div 1{,}5 \\ x^2 &= 16 && \mid \sqrt{\ } \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{16} \\ x_1 &= 4 \\ x_2 &= -4 \end{aligned}$$

Untersuche die Stelle $x = 4$:

$f''(4) = 12$

$f''(4) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $x = 4$

$f(4) = -66 \Rightarrow T(4 \mid -66)$

Untersuche die Stelle $x = -4$:

$f''(-4) = -12$

$f''(-4) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt an der Stelle $x = -4$

$f(-4) = 62 \Rightarrow H(-4 \mid 62)$

Wenn die zweite Ableitung Null ist

Untersuche die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{54}x^4 - 2$ auf Extremstellen:

Berechne die Nullstellen der 1. Ableitung:
Setze $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{27}x^3 &= 0 \quad \left| \div \frac{2}{27} \right. \\ x^3 &= 0 \quad \left| \sqrt[3]{} \right. \\ x_1 &= 0 \end{aligned}$$

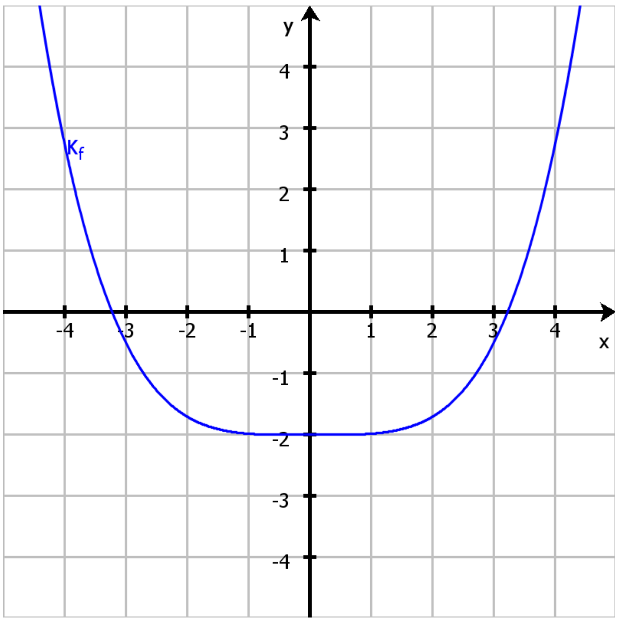
Untersuche die Stelle $x = 0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{9}x^2 \\ f''(0) &= 0 \end{aligned}$$

Betrachte die 4. Ableitung:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{4}{9}x \\ f''''(x) &= \frac{4}{9} \\ f''''(0) &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$f''''(0) > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt an der Stelle $x = 0$
$f(0) = -2 \Rightarrow T(0 \mid -2)$



Merke:

Sei $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung. Ist $f'(x_0) = 0,\ \ldots,\ f^{(n-1)}(x_0) = 0$, jedoch $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ und n eine gerade Zahl, so besitzt f an der Stelle x_0 einen Hochpunkt $\left(f^{(n)}(x_0) < 0\right)$, bzw. einen Tiefpunkt $\left(f^{(n)}(x_0) > 0\right)$.