Aufgaben zu Nullstellen (1) Lösungsvorschlag

Aufgaben

1 Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x)=\frac{-x^2+(a-1)x}{x+1}$; $a\in\mathbb{R}_+$ und $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

1.1 Bestimmen Sie Lage, Art und Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von a .

<u>Lösungsvorschlag:</u>

$f_a(x)=0 \underset{\text{CAS}}{\Rightarrow} x=a-1 \lor x=0$

$a=1$: f_a hat eine doppelte Nullstelle bei $x=0$.

$a=0$: f_a hat eine einfache Nullstelle bei $x=0$.

$a\neq 1 \land a\neq 0$: f_a hat zwei einfache Nullstellen bei $x=0$ und $x=a-1$. □

2 Gegeben sind die Funktionen f_b mit $f(x)=8\frac{x-3}{x^2-6x+b}$; $b\in\mathbb{R}$

2.1 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von f_b in Abhängigkeit von b .

<u>Lösungsvorschlag:</u>

f_b hat Definitionslücken, wenn der Nenner Null ist

$x^2-6x+b=0 \Rightarrow x=3-\sqrt{9-b} \lor x=3+\sqrt{9-b}$

$b<9$: $D=\mathbb{R}\setminus\{3-\sqrt{9-b};\ 3+\sqrt{9-b}\}$

$b=9$: $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$b>9$: $D=\mathbb{R}$ □

2.2 Ermitteln Sie, für welche Werte des Parameters b der Graph die x-Achse bzw. die y-Achse schneidet. Geben Sie für diese Werte von b die Koordinaten der Schnittpunkte an.

<u>Lösungsvorschlag:</u>

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$f_b(x)=0 \Rightarrow x=3$

$b\leq 9$: f_b hat keine Nullstellen.

$b>9$: f_b hat die Nullstelle $N(3\,|\,0)$.

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0)=-\frac{24}{b}$

$b=0$: f_b schneidet die y-Achse nicht.

$b\neq 0$: f_b schneidet die y-Achse in $S_y\left(0\,\middle|\,-\frac{24}{b}\right)$. □

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2018 Henrik Horstmann

Aufgaben

3 Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x)=x+3+\frac{a^2}{x-1}$; $a\in\mathbb{R}$.

3.1 Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f_a an.

Lösungsvorschlag:

$a=0 \Rightarrow D=\mathbb{R}$

$a\neq 0 \Rightarrow D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ □

3.2 Sei nun $a\neq 0$. Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a . Für welche Werte von a hat die Funktion f_a zwei, eine bzw. keine Nullstellen?

Lösungsvorschlag:

$f_a(x)=0 \Rightarrow x=-1-\sqrt{4-a^2} \vee x=-1+\sqrt{4-a^2}$

$4-a^2<0 \Rightarrow 4<a^2 \Rightarrow 2<|a| \Rightarrow f_a$ hat keine Nullstellen.

$4-a^2=0 \Rightarrow 4=a^2 \Rightarrow 2=|a| \Rightarrow f_a$ hat eine Nullstelle.

$4-a^2>0 \Rightarrow 4>a^2 \Rightarrow a\in]-2;2[\Rightarrow f_a$ hat zwei Nullstellen. □

4 Gegeben sind die Funktionen f_k mit $f_k(x)=\frac{1}{4}\left(x^3-6kx^2+9k^2x\right)$.

4.1 Ermitteln Sie alle Nullstellen der Funktion f_k mit ihren Vielfachheiten.

Lösungsvorschlag:

$f_k(x)=\frac{1}{4}\left(x^3-6kx^2+9k^2x\right) \underset{\text{CAS}}{=} \frac{x(x-3k)^2}{4}$

$k=0 \Rightarrow$ dreifache Nullstelle $x=0$

$k\neq 0 \Rightarrow$ einfache Nullstelle $x=0$ und doppelte Nullstelle $x=3k$. □

5 Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x)=\frac{1}{4}(a-x)\left(x^2+4x+4\right)$; $a\in\mathbb{R}$.

5.1 Ermitteln Sie das Intervall, in dem $f_a(x)\geq 0$ ist.

Lösungsvorschlag:

$0\leq f_a(x)=\frac{1}{4}(a-x)\left(x^2+4x+4\right) \Rightarrow 0\leq a-x \Rightarrow x\leq a$

$\Rightarrow$ für $x\in]-\infty;a]$ ist $f_a(x)\geq 0$ □

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2018 Henrik Horstmann

Aufgaben

5.2 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f_4 mit den jeweiligen Vielfachheiten an

Lösungsvorschlag:

$f_4(x)=\frac{1}{4}(4-x)(x^2+4x+4)=\frac{1}{4}(4-x)(x+2)^2$

$\Rightarrow$ einfache Nullstelle $x=4$, doppelte Nullstelle $x=-2$ □

6 Gegeben sind die Funktionen $f_k(x)=\frac{1}{32}(x^3-6kx^2-36k^2x+216k^3)$; $k\in\mathbb{R}_-^*$

6.1 Berechnen Sie alle Nullstellen und ihre Vielfachheiten.
Geben Sie f_k als Produkt von Linearfaktoren an.

Lösungsvorschlag:

$f(x)=\frac{1}{32}(x^3-6kx^2-36k^2x+216k^3)\underset{\text{CAS}}{=}\frac{1}{32}(x-6k)^2(x+6k)$

Einfache Nullstelle $x=-6\text{k}$ doppelte Nullstelle $x=6k$ □

7 Sei f eine Funktion mit $f(x)=\frac{x^3-5x+a}{4x^3}$.

7.1 Der Graph von f hat bei $x=3$ eine Nullstelle. Bestimmen Sie a und zeigen Sie, dass es keine weiteren Nullstellen gibt.

Lösungsvorschlag:

$f(3)=0 \underset{\text{CAS}}{\Rightarrow} a=-12$

$f(x)=\frac{x^3-5x-12}{4x^3}\underset{\text{CAS}}{=}\frac{(x-3)(x^2+3x+4)}{4x^3}$

Nullstellen: $f(x)=0 \underset{\substack{\text{Satz}\\ \text{vom}\\ \text{Nullprodukt}}}{\Rightarrow} x-3=0 \vee x^2+3x+4=0$

Fall $x-3=0 \Rightarrow$ Nullstelle $x=3$

Fall $x^2+3x+4=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{-5}}{2}$ hat keine Lösung. □

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2018 Henrik Horstmann