Lösungsvorschläge

Linearfaktorzerlegung

a)

$$f(x)=x^2-6x+9 \underset{\substack{\text{2. binomische}\\\text{Formel}}}{=} (x-3)^2$$

b)

$$f(x)=2x^2+12x+18=2\left(x^2+6x+9\right) \underset{\substack{\text{1. binomische}\\\text{Formel}}}{=} 2(x+3)^2$$

c)

$$f(x)=\left(3x^2-24x+48\right)\left(2x^2-18\right)=6\left(x^2-8x+16\right)\left(x^2-9\right) \underset{\substack{\text{2. und 3.}\\\text{binomische}\\\text{Formel}}}{=} 6(x-4)^2(x-3)(x+3)$$

d)

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3$$

Nullstellen bestimmen: Setze $f(x)=0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3 &= 0 \quad | \cdot 2\\ x^2-x-6 &= 0\end{aligned}$$

Setze $a=1,\ b=-1,\ c=-6$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}\\ &= \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}\\ &= \frac{1\pm\sqrt{25}}{2}\\ &= \frac{1\pm 5}{2}\\ x_1 &= 3\\ x_2 &= -2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ f(x)=\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$$

e)

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+\frac{8}{3}x$$

Nullstellen bestimmen: Setze $f(x)=0$

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+2x^2+\frac{8}{3}x=x\left(-\frac{2}{3}x+2x+\frac{8}{3}\right)$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist

$$x_1=0\ \vee\ -\frac{2}{3}x+2x+\frac{8}{3}=0$$

$$-\frac{2}{3}x^2+2x+\frac{8}{3} = 0 \quad |\cdot 3$$

$$-2x^2+6x+8 = 0$$

Setze $a=-2,\ b=6,\ c=8$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4\cdot(-2)\cdot 8}}{2\cdot(-2)}\\
&= \frac{-6\pm\sqrt{36+64}}{-4}\\
&= \frac{-6\pm\sqrt{100}}{-4}\\
&= \frac{-6\pm 10}{-4}\\
x_2 &= 4\\
x_3 &= -1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ f(x)=-\frac{2}{3}x(x-4)(x+1)$$

f)

$$f(x)=\frac{9}{4}x^4-2x^2+\frac{4}{9}=\frac{9}{4}\left(x^4-\frac{8}{9}x^2+\frac{16}{81}\right)\underset{\text{2. binomische Formel}}{=}\frac{9}{4}\left(x^2-\frac{4}{9}\right)^2\underset{\text{3. binomische Formel}}{=}\frac{9}{4}\left(\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)\right)^2$$

$$=\frac{9}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$$

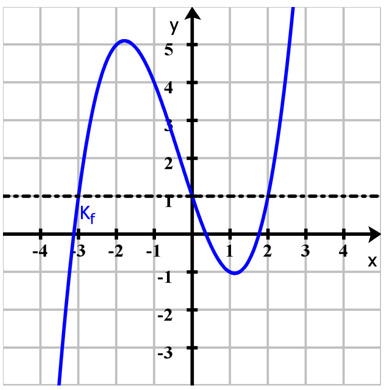
Funktionsgleichungen aufstellen

A) $f(x)=-\frac{3}{2}(x+1)(x-2)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3$

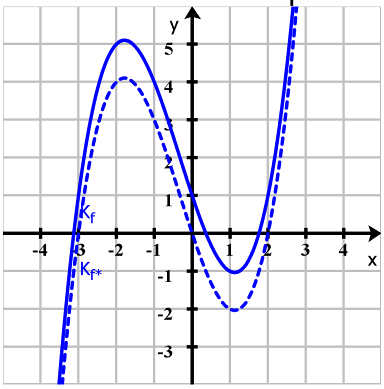
B) $f(x)=\frac{1}{6}(x+4)(x-1)(x-3)=\frac{1}{6}x^3-\frac{13}{6}x^2+2$

C) $f(x)=\frac{1}{15}(x+4)(x+2)x(x-3)=\frac{1}{15}x^4+\frac{1}{5}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{5}x$

D) Bei diesem Graphen sind die Nullstellen schlecht ablesbar. Allerdings schneidet die Gerade mit der Gleichung $y=1$ den Graphen exakt an den Stellen $x=-3$, $x=0$ und $x=2$:



Verschiebe den Graphen deshalb um 1 LE nach unten:



Die Funktionsgleichung zu dem verschobenen Graphen lässt sich nun mit Hilfe der Nullstellen und dem Punkt $P(-1\,|\,3)$ bestimmen:

$$f^*(x)=\frac{1}{2}(x+3)x(x-2)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x$$

die gesucht Funktionsgleichung ist $f(x)=f^*(x)+1=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x+1$.

Parameter bestimmen

a) Bestimme die Lösungen der Gleichung $\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=0$:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{8}{3} &= 0 \quad \Big|\cdot 3\\
2x^2-8x+8 &= 0
\end{aligned}$$

Setze $a=2,\ b=-8,\ c=8$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 2\cdot 8}}{2\cdot 2}\\
&= \frac{8\pm\sqrt{64-64}}{4}\\
&= \frac{8\pm\sqrt{0}}{4}\\
&= \frac{8\pm 0}{4}\\
x_1 &= 2\\
x_2 &= 2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ a=-2$

b) Bestimme die Lösungen der Gleichung $2x^2-6x-36=0$:

$$2x^2-6x-36 = 0$$

Setze $a=2,\ b=-6,\ c=-36$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 2\cdot(-36)}}{2\cdot 2}\\
&= \frac{6\pm\sqrt{36+288}}{4}\\
&= \frac{6\pm\sqrt{324}}{4}\\
&= \frac{6\pm 18}{4}\\
x_1 &= 6\\
x_2 &= -3
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ a=-3$

c) Bestimme die Lösungen der Gleichung $x^3+x^2-6x=0$:

$$\begin{aligned}
x^3+x^2-6x &= 0\\
x\left(x^2+x-6\right) &= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ x=0$ oder $x^2+x-6=0$

$$x^2+x-6 = 0$$

Setze $a=1,\ b=1,\ c=-6$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
x_{2,3} &= \frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}\\
&= \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}\\
&= \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}\\
&= \frac{-1\pm 5}{2}\\
x_2 &= 2\\
x_3 &= -3
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ a=-2$

d) Bestimme die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{5}{2}=0$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{5}{2} &= 0 \quad | \cdot 2 \\
x^2+4x-5 &= 0
\end{aligned}$$

Setze $a=1,\ b=4,\ c=-5$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4\cdot 1\cdot(-5)}}{2\cdot 1} \\
&= \frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2} \\
&= \frac{-4\pm\sqrt{36}}{2} \\
&= \frac{-4\pm 6}{2} \\
x_1 &= 1 \\
x_2 &= -5
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ a=1 \ \wedge\ b=5$ oder $a=-5 \ \wedge\ b=-1$

Modellieren

a) Funktionsgleichung der Parabel aufstellen:
Nullstellen bei $x=-2$ und $x=2$ $\Rightarrow f(x)=a(x-2)(x+2)$
Die Kurve geht durch den Punkt $P(1{,}5\,|\,-1{,}05)$
$f(1{,}5)=a(-0{,}5)3{,}5=-1{,}75a=-1{,}05 \ \Rightarrow\ a=0{,}6$
Tiefe des Kanals ist $-f(0)=2{,}4$ m .

b) Funktionsgleichung der Parabel aufstellen:
Nullstellen bei $x=-30$ und $x=30$ $\Rightarrow f(x)=a(x-30)(x+30)$
Die Kurve geht durch den Punkt $P(15\,|\,30)$
$f(15)=a(-15)45=-675a=30 \ \Rightarrow\ a=-\frac{2}{45}$
Höhe der Brücke ist $f(0)=40$m .