Lineares Gleichungssystem

Was ist das?

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) besteht aus mindestens zwei linearen Gleichungen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} g_1&: \; y=\frac{1}{2}x-1 \\ g_2&: \; y=\frac{3}{2}x+2 \end{aligned} \qquad x\in\mathbb{R}$$

Was ist gesucht?

Gesucht sind im allgemeinen Werte für x und y, die für alle Gleichungen gelten.

Lösungsstrategien

Lineare Gleichungen können unterschiedlich dargestellt sein. Je nach dem kann eine bestimmte Lösungsstrategie von Vorteil sein. Hier werden nur LGS mit maximal zwei Variablen und zwei Gleichungen betrachtet.

a) Beide Gleichungen sind nach der gleichen Variable aufgelöst:

$$\begin{aligned} g_1&: \; y=\frac{1}{2}x-1 \\ g_2&: \; y=\frac{3}{2}x+2 \end{aligned} \qquad x\in\mathbb{R}$$

Hier bietet sich das **Gleichsetzungsverfahren** an:

g_1 und g_2 gleichsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x-1 &= \frac{3}{2}x+2 \quad \left|\cdot 2\right. \text{ (=Hauptnenner)} \\ x-2 &= 3x+4 \quad \left|+2\right. \\ x &= 4x+6 \quad \left|-3x\right. \\ -2x &= 6 \quad \left|\div(-2)\right. \\ x &= -3 \end{aligned}$$

$x=-3$ in eine der beiden Gleichungen einsetzen und y berechnen:

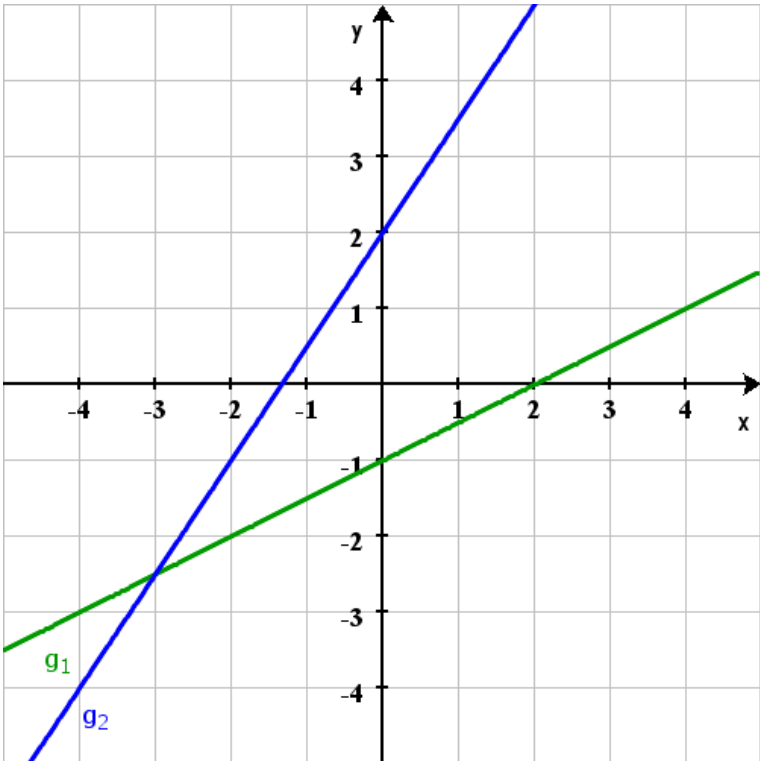
$$y=\frac{3}{2}\cdot(-3)+2=-\frac{9}{2}+\frac{4}{2}=-\frac{5}{2}$$

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2019 Henrik Horstmann

es gibt genau eine Lösung für x und y

$\Rightarrow$ Lösungsmenge $L=\left\{\left(-3\middle|-\frac{5}{2}\right)\right\}$

Grafische Darstellung der linearen Gleichungen:



Der Schnittpunkt der beiden Geraden entspricht dem Element in der Lösungsmenge.

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2019 Henrik Horstmann

b) Bei beiden Gleichungen sind sämtliche Variablen auf einer Seite:

$$g_1\colon\ 4=2x-4y \qquad x\in\mathbb{R}$$
$$g_3\colon\ 6=-x+2y$$

Hier bietet sich das **Additionsverfahren** an:

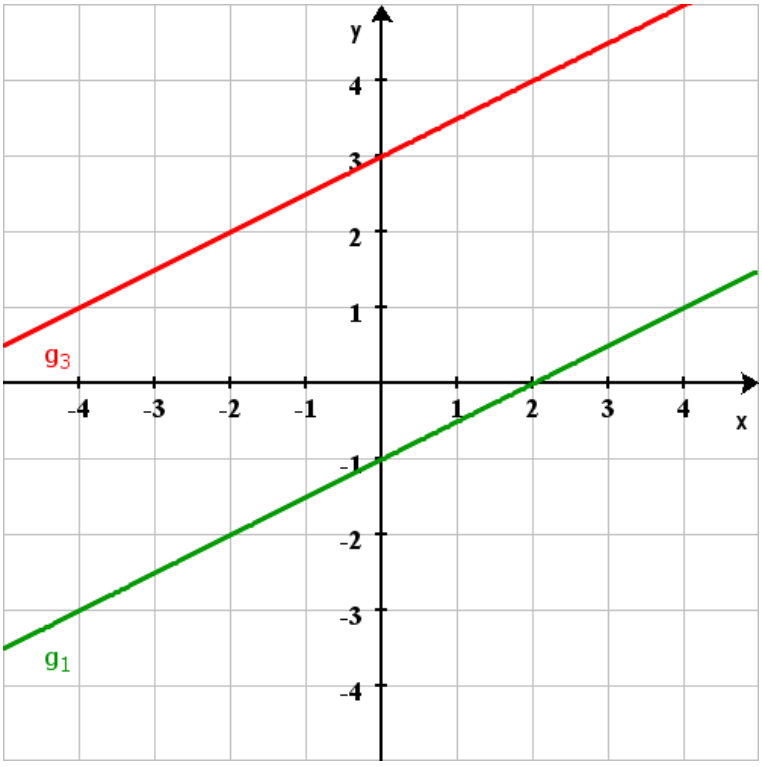
$$\begin{array}{rcrcrl} 4 & = & 2x & - & 4y & \mid\div 2 \\ 6 & = & -x & + & 2y & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrl} 2 & = & x & - & 2y & \\ + & & + & & + & \\ 6 & = & -x & + & 2y & \\ = & & = & & = & \\ \hline 8 & \not= & 0 & & & \end{array}$$

Die Gleichung hat keine Lösung $\Rightarrow\ L=\varnothing$ (die Lösungsmenge ist leer)

Grafische Darstellung der linearen Gleichungen:

g_1 und g_3 nach y auflösen: $y=\frac{1}{2}x-1\ \wedge\ y=\frac{1}{2}x+3$



Die Gerade sind parallel, deshalb haben sie keine gemeinsamen Punkte, was einer leeren Lösungsmenge entspricht.

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2019 Henrik Horstmann

c) Nur eine der beiden Gleichungen ist nach einer Variable aufgelöst:

$$g_1\colon\ y=\frac{1}{2}x-1 \qquad x\in\mathbb{R}$$
$$g_4\colon\ 4=2x-4y$$

Hier bietet sich das **Einsetzungsverfahren** an:

g_1 in g_4 einsetzen:

$$\begin{array}{lcll} 4 & = & 2x-4\,\boldsymbol{y} & \mid \text{Einsetzen} \\ 4 & = & 2x-4\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}x-1}\right) & \mid \text{Klammern auflösen} \\ 4 & = & 2x-2x+4 & \mid \text{Zusammenfassen} \\ 4 & \overset{\checkmark}{=} & 4 & \end{array}$$

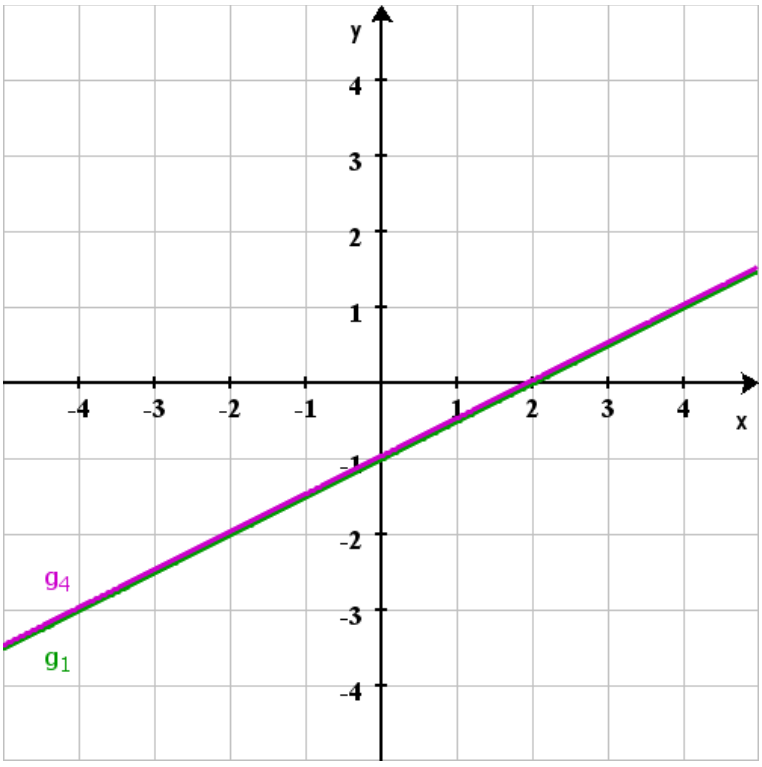
diese Gleichung ist für jeden Wert für $x\in\mathbb{R}$ erfüllt.

$\Rightarrow$ Lösungsmenge $L=\left\{(x|y)\ \middle|\ x\in\mathbb{R}\ \wedge\ y=\frac{1}{2}x-1\right\}$

Hinweis: die Lösungsmenge enthält unendlich viele Elemente.

Grafische Darstellung der linearen Gleichungen:

g_2 nach y auflösen: $y=\frac{1}{2}x-1$



Die Geraden liegen aufeinander, d.h. sie haben unendlich viele gemeinsame Punkte. Alle gemeinsame Punkte der Geraden haben die Koordinaten $\left(x\middle|\frac{1}{2}x-1\right)$. Damit repräsentiert jeder Punkt auf den Geraden ein Element in der Lösungsmenge.

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2019 Henrik Horstmann