Lösungen zu Aufgaben zu Schnittpunkten von Graphen

Schnittpunkte Berechnen

a) Setze $f(x)=h(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x) && \left|-h(x)\right. \text{ (Differenzfunktion bilden)} \\ f(x)-h(x) &= 0 \\ -2x+1-\left(x+\frac{2}{3}\right) &= 0 && \mid \text{Klammerauflösen} \\ -2x+1-x-\frac{2}{3} &= 0 && \mid \cdot 3 \text{ (Hauptnenner)} \\ -6x+3-3x-2 &= 0 && \mid \text{Zusammenfassen} \\ -9x+1 &= 0 && \mid -1 \\ -9x &= -1 && \mid \div(-9) \\ x &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$x=\frac{1}{9}$ in $f(x)$ einsetzen:

$f\left(\frac{1}{9}\right)=-2\cdot\frac{1}{9}+1=\frac{7}{9}$

Schnittpunkt von K_f und K_h ist $S=\left(\frac{1}{9}\middle|\frac{7}{9}\right)$

b) Setze $f(x)=h(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x) && \left|-h(x)\right. \text{ (Differenzfunktion)} \\ f(x)-h(x) &= 0 \\ 5x^2+38x+69-(3x+9) &= 0 && \mid \text{Klammern auflösen} \\ 5x^2+38x+69-3x-9 &= 0 && \mid \text{Zusammenfassen} \\ 5x^2+35x+60 &= 0 \end{aligned}$$

Löse die Gleichung mit der Lösungsformel:

$5x^2+35x+60 = 0$

Setze $a=5,\ b=35,\ c=60$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-35\pm\sqrt{(35)^2-4\cdot5\cdot60}}{2\cdot5} \\ &= \frac{-35\pm\sqrt{1225-1200}}{10} \\ &= \frac{-35\pm\sqrt{25}}{10} \\ &= \frac{-35\pm5}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Setze $x_1=-4$ in $f(x)$ ein:

$$\begin{aligned} f(-4) &= 5\cdot 16+38\cdot(-4)+69 \\ &= -3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ S_1=(-4\ |-3)$

Setze $x_2=-3$ in $f(x)$ ein:

$$\begin{aligned} f(-3) &= 5\cdot 9+38\cdot(-3)+69 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ S_2=(-3|0)$

c) Setze $f(x)=h(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x) && |-h(x)\ \text{(Differenzfunktion)} \\ f(x)-h(x) &= 0 && \\ x^3+\frac{11}{10}x^2-\frac{9}{5}x+3-\left(-\frac{2}{5}x^2-\frac{4}{5}x+3\right) &= 0 && |\text{Klammer auflösen} \\ x^3+\frac{11}{10}x^2-\frac{9}{5}x+3+\frac{2}{5}x^2+\frac{4}{5}x-3 &= 0 && |\cdot 10\ \text{(Hauptnenner)} \\ 10x^3+11x^2-18x+30+4x^2+8x-30 &= 0 && |\text{Zusammenfassen} \\ 10x^3+15x^2-10x &= 0 && |\text{Faktorisieren} \\ x\left(10x^2+15x-10\right) &= 0 && \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ x=0\ \vee\ 10x^2+15x-10=0$

Setze $a=10,\ b=15,\ c=-10$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{(2,3)} &= \frac{-15\pm\sqrt{(15)^2-4\cdot 10\cdot(-10)}}{2\cdot 10} \\ &= \frac{-15\pm\sqrt{225+400}}{20} \\ &= \frac{-15\pm\sqrt{625}}{20} \\ &= \frac{-15\pm 25}{20} \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Setze $x_{1,2}=0$ in $h(x)$ ein:

$$h(0) = 3$$

$\Rightarrow\ S_{1,2}=(0|3)$

Setze $x_3=-2$ in $h(x)$ ein:

$$\begin{aligned} h(-2) &= -\frac{2}{5}\cdot 4-\frac{4}{5}\cdot(-2)+3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ S_3(-2|3)$

d) Setze $f(x)=h(x)$:

$$\begin{array}{rcll} f(x) &=& h(x) & |-h(x) \text{ (Differenzfunktion)} \\ f(x)-h(x) &=& 0 & \\ -x^4+2x^3+17x^2-11-(2x^3+5) &=& 0 & |\text{Klammer auflösen} \\ -x^4+2x^3+17x^2-11-2x^3-5 &=& 0 & |\text{Zusammenfassen} \\ -x^4+17x^2-16 &=& 0 & |\text{Substitution: } x^2 \rightarrow u \\ -u^2+17u-16 &=& 0 & \end{array}$$

Setze $a=-1$, $b=17$, $c=-16$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{array}{rcl} u_{(1,2)} &=& \dfrac{-17\pm\sqrt{(17)^2-4\cdot(-1)\cdot(-16)}}{2\cdot(-1)} \\ &=& \dfrac{-17\pm\sqrt{289-64}}{-2} \\ &=& \dfrac{-17\pm\sqrt{225}}{-2} \\ &=& \dfrac{-17\pm 15}{-2} \\ u_1 &=& 16 \\ u_2 &=& 1 \end{array}$$

Rücksubstitution: $u \rightarrow x^2$

$$\begin{array}{llcll} u_1 & \rightarrow \quad x^2 &=& 16 & |\sqrt{} \\ & x_{1,2} &=& \pm\sqrt{16} & \\ & x_{1,2} &=& \pm 4 & \\ & x_1 &=& 4 & \\ & x_2 &=& -4 & \\ u_2 & \rightarrow \quad x^2 &=& 1 & |\sqrt{} \\ & x_{3,4} &=& \pm\sqrt{1} & \\ & x_{3,4} &=& \pm 1 & \\ & x_3 &=& 1 & \\ & x_4 &=& -1 & \end{array}$$

Setze $x_1=4$ in $h(x)$ ein: $h(4)=2\cdot 4^3+5=133$

$\Rightarrow \; S_1=(4|133)$

Setze $x_2=-4$ in $h(x)$ ein: $h(-4)=2\cdot(-4)^3+5=-123$

$\Rightarrow \; S_2=(-4|-123)$

Setze $x_3 = 1$ in $h(x)$ ein: $h(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 = 7$

$\Rightarrow$ $S_3 = (1|7)$

Setze $x_4 = -1$ in $h(x)$ ein: $h(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 5 = 3$

$\Rightarrow$ $S_4 = (-1|3)$

e) Setze $f(x) = h(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= h(x) && |-h(x) \text{ (Differenzfunktion)} \\
f(x) - h(x) &= 0 \\
\frac{1}{6}x^4 + \frac{7}{12}x^2 - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}\right) &= 0 && |\text{Klammer auflösen} \\
\frac{1}{6}x^4 + \frac{7}{12}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2} &= 0 && |\cdot 12 \text{ (Hauptnenner)} \\
2x^4 + 7x^2 - 3x^4 + 18 &= 0 && |\text{Zusammenfassen} \\
-x^4 + 7x^2 + 18 &= 0 && |\text{Substitution: } x^2 \rightarrow u \\
-u^2 + 7u + 18 &= 0
\end{aligned}$$

Setze $a = -1$, $b = 7$, $c = +18$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned}
u_{(1,2)} &= \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 18}}{2 \cdot (-1)} \\
&= \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{-2} \\
&= \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{-2} \\
&= \frac{-7 \pm 11}{-2} \\
u_1 &= -2 \\
u_2 &= 9
\end{aligned}$$

Rücksubstitution: $u \rightarrow x^2$

$u_1 \rightarrow x^2 = -2$

keine Lösung

$$\begin{aligned}
u_2 \rightarrow \quad x^2 &= 9 && |\sqrt{\ } \\
x_{1,2} &= \pm\sqrt{9} \\
x_{1,2} &= \pm 3 \\
x_1 &= 3 \\
x_2 &= -3
\end{aligned}$$

Setze $x_1=3$ in $h(x)$ ein: $h(3)=\frac{1}{4}\cdot 3^4+\frac{3}{2}=\frac{87}{4}$

$\Rightarrow\ S_1=\left(3\middle|\frac{87}{4}\right)$

Setze $x_2=-3$ in $h(x)$ ein: $h(-3)=\frac{1}{4}\cdot(-3)^4+\frac{3}{2}=\frac{87}{4}$

$\Rightarrow\ S_2=\left(-3\middle|\frac{87}{4}\right)$

f) Setze $f(x)=h(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x) && |-h(x)\ \text{(Differenzfunktion)}\\ f(x)-h(x) &= 0 \\ x\cdot 3^x-(2\cdot 3^x) &= 0 && |\text{Klammer auflösen}\\ x\cdot 3^x-2\cdot 3^x &= 0 && |\text{Faktorisieren}\\ 3^x(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:

$3^x=0\ \lor\ x-2=0$

es ist aber $3^x\neq 0$ für $x\in\mathbb{R}$

damit isr $x=2$ die einzige Lösung der Gleichung

Setze $x=2$ in $h(x)$ ein: $h(2)=2\cdot 3^2=18$

$\Rightarrow\ S=(2|18)$

Funktionsgleichung Bestimmen

a) 1. Funktionsgleichung:

$$f(x)-h(x)=x^2-\frac{15}{2}x+14\ \Leftarrow\ h(x)=f(x)-\left(x^2-\frac{15}{2}x+14\right)$$

$$=x^2-\frac{9}{2}x+5-x^2+\frac{15}{2}x-14$$

$$=3x-9$$

2. Funktionsgleichung

$$h(x)-f(x)=x^2-\frac{15}{2}x+14\ \Leftrightarrow\ h(x)=x^2-\frac{15}{2}x+14+f(x)$$

$$=x^2-\frac{15}{2}x+14+x^2-\frac{9}{2}x+5$$

$$=2x^2-12x+19$$

b) 1. Funktionsgleichung

$f(x)-h(x)=2^x+4x^2 \;\Leftrightarrow\; h(x)=f(x)-\left(2^x+4x^2\right)$

$$=2x-\frac{x^2}{2}-2^x-4x^2$$

$$=2x-\frac{9}{2}x^2-2^x$$

2. Funktionsgleichung

$h(x)-f(x)=2^x+4x^2 \;\Leftrightarrow\; h(x)=2^x+4x^2+f(x)$

$$=2^x+4x^2+2x-\frac{x^2}{2}$$

$$=2^x+\frac{7}{2}x^2+2x$$

3. Funktionsgleichung

$2^x+4x^2=0 \;\Leftrightarrow\; 2\cdot 2^x+8x^2=0$

Auch die rechte Gleichung entält alle Schnittstellen von K_f und K_h

$h(x)-f(x)=2\cdot 2^x+8x^2 \;\Leftrightarrow\; h(x)=2\cdot 2^x+8x^2+f(x)$

$$=2\cdot 2^x+8x^2+2x-\frac{x^2}{2}$$

$$=2\cdot 2^x+\frac{15}{2}x^2+2x$$

Argumentieren und Beweisen

a) Es ist $f(x)=-x^4-\frac{1}{2}x^2-2<0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, damit verläuft K_f unterhalb der x-Achse.
Außerdem ist $h(x)=2x^6+x^2+1>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, damit verläuft K_h oberhalb der x-Achse.
Damit können K_f und K_h keine gemeinsamen Punkte haben.

b) Es gilt $x\to-\infty \;\Rightarrow\; f(x)\to\infty \;\wedge\; x\to\infty \;\Rightarrow\; f(x)\to-\infty$, außerdem ist f stetig. K_h dagegen ist eine Gerade mit positiver Steigung, d.h.
$x\to-\infty \;\Rightarrow\; h(x)\to-\infty \;\wedge\; x\to\infty \;\Rightarrow\; h(x)\to\infty$ und ebenfalls stetig.
K_f verläuft somit vom 2. Quadranten in den 4. Quadranten und K_h vom 3. Quadranten in den 1. Quadranten. Damit müssen Sie sich mindestens einmal schneiden.

Modellierungsaufgabe

a) Setze $K(x)=E(x)$:

$$\begin{aligned} K(x) &= E(x) && \mid -E(x) \text{ (Differenzfunktion)} \\ K(x)-E(x) &= 0 && \mid \\ x^2-8x+36-(5x) &= 0 && \mid \text{Klammer auflösen} \\ x^2-8x+36-5x &= 0 && \mid \text{Zusammenfassen} \\ x^2-13x+36 &= 0 \end{aligned}$$

Setze $a=1$, $b=-13$, $c=36$ in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{(1,2)} &= \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2-4\cdot 1\cdot 36}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2} \\ &= \frac{13\pm\sqrt{25}}{2} \\ &= \frac{13\pm 5}{2} \\ x_1 &= 4 \\ x_2 &= 9 \end{aligned}$$

Nutzenschwelle bei $x=4$ und Nutzengrenze bei $x=9$.

b) Gewinnfunktion: $G(x)=E(x)-K(x)=5x-\left(x^2-8x+36\right)=-x^2+13x-36$

Gewinn für 6 Stück: $G(5)=-5^2+13\cdot 5-36=4$

Der Gewinn für 6 Stück beträgt 4 GE (=Geldeinheiten)