Lösungen

Umkehrfunktionen Bestimmen

a) $\bar{f}(x)=\sqrt[3]{2x-2}+2$

b) $\bar{f}(x)=\sqrt[5]{\frac{x}{3}+2}-2$

c) $\bar{f}(x)=\frac{1}{4x}-2$

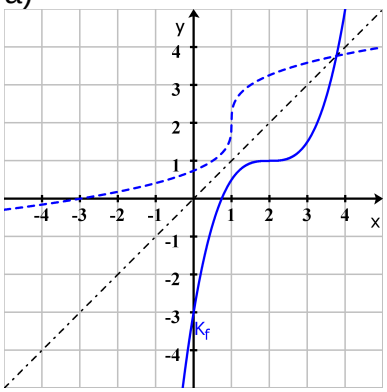
d) $\bar{f}(x)=1+\sqrt[3]{\left(\frac{3}{x-2}\right)}$

e) $\bar{f}(x)=\left(\frac{x+1}{2}\right)^3-3$

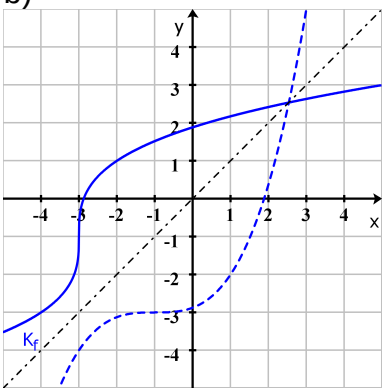
f) $\bar{f}(x)=3(x+2)^5$

Schaubilder von Umkehrfunktionen

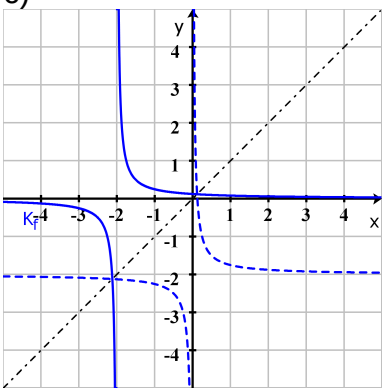
a)



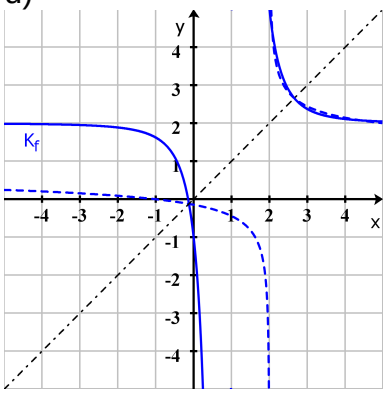
b)



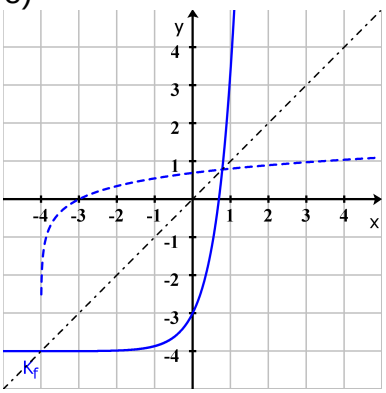
c)



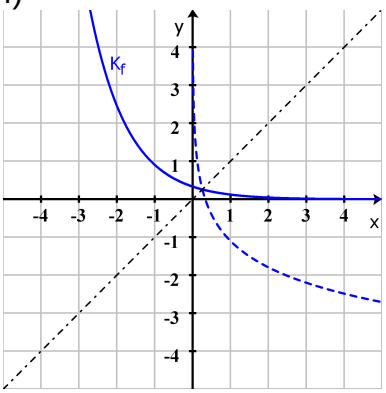
d)



e)



f)



Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2020 Henrik Horstmann

Umkehrnüsse

a) $f(x)=x$, denn f ist streng monoton steigend, da der Graph eine Gerade mit positiver Steigung ist. Außerdem liegt der Graph genau auf der Spiegelachse für Umkehrfunktionen. Damit wird jeder Punkt der Gerade bei der Umkehrung auf sich selbst gespiegelt.

$p(x)=-x$, den p ist streng monoton fallend, da der Graph eine Gerade mit negativer Steigung ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} p(x) &= -x && \mid p(x) \text{ durch } y \text{ ersetzen} \\ y &= -x && \mid x \text{ und } y \text{ vertauschen} \\ x &= -y && \mid \text{nach } y \text{ auflösen} \\ y &= -x && \mid y \text{ durch } \bar{p}(x) \text{ ersetzen} \\ \bar{p}(x) &= -x \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $\bar{p}(x)=p(x)$ ist.

$h(x)=\frac{1}{x}$, denn h ist streng monoton fallend und es ist:

$x=\frac{1}{y} \Leftrightarrow y\cdot x=1 \Leftrightarrow y=\frac{1}{x}$, damit ist $h(x)=\bar{h}(x)$

b) Eine Funktion darf maximal eine Nullstelle haben, damit sie umkehrbar ist. Hätte sie mehrere Nullstellen, so wäre die Umkehrfunktion an der Stelle $x=0$ nicht mehr eindeutig und damit keine Funktion.

c)

i. Die Aussage ist falsch, denn der Graph der Funktion $f(x)=\frac{1}{x^2}$ hat keinen Tief- bzw. Hochpunkt („Höcker“) und trotzdem ändert sich das Monotonieverhalten von f an der Stelle $x=0$.

ii. Die Aussage ist wahr, denn jede zur x-Achse parallele Gerade wird durch die Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden zu einer zur y-Achse parallelen Gerade. Die an der 1. Winkelhalbierenden gespiegelte Kurve der Funktion hat folglich mit jeder zur y-Achse parallelen Gerade maximal einen gemeinsamen Punkt, was bedeutet, dass zu jeder Punkt auf der gespiegelten Kurve eine eindeutige x-Koordinate besitzt. Damit ist die Funktion umkehrbar.

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2020 Henrik Horstmann