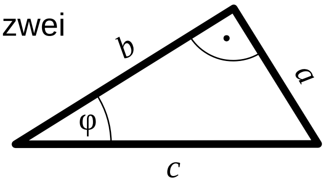
Tangens

Tangens und seine Beziehungen

Im rechtwinkligen Dreieck ist der Tangens als Verhältnis der zwei Katheten definiert:



$$\tan(\varphi)=\frac{a}{b}$$

Es gelten damit folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin(\varphi)=\dfrac{a}{c} & \Leftrightarrow a=c\cdot\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi)=\dfrac{b}{c} & \Leftrightarrow b=c\cdot\cos(\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow \tan(x)=\frac{c\cdot\sin(x)}{c\cdot\cos(x)}=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Tangens für beliebige Winkel

Aus der Definitionserweiterung von Sinus und Kosinus für beliebig Winkel kann mit Hilfe der oben beschrieben Beziehung die Definition von Tangens ebenfalls auf beliebige Winkel erweitert werden.

Es gibt allerdings eine Einschränkung.

Definitionslücken und Polstellen

Der Quotient $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ist nur definiert für $\cos(x)\neq 0$, d.h. der Definitionsbereich von $\tan(x)$ enthält Definitionslücken an den Stellen, an denen $\cos(x)=0$ ist.

$\Rightarrow$ Definitionsbereich von $\tan(x)$ ist $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

Für $x \underset{\text{von } 0}{\rightarrow} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\sin(x)\rightarrow 1\\ \cos(x)\rightarrow 0\end{array}\right. \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\rightarrow\infty \qquad \left(x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \sin(x)>0 \wedge \cos(x)>0\right)$

für $x \underset{\text{von } \pi}{\rightarrow} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\sin(x)\rightarrow 1\\ \cos(x)\rightarrow 0\end{array}\right. \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\rightarrow-\infty \qquad \left(x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[\Rightarrow \sin(x)>0 \wedge \cos(x)<0\right)$

Damit hat der Tangens an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ eine Polstelle. Da auch der Tangens periodisch ist besitzt er nach jeder Periode eine weitere Polstelle.

Wertebereich

Da der Tangens Polstellen besitzt ist der Wertebereich von $\tan(x)$: $W=\mathbb{R}$

Periodizität

Für $x \in \left]\pi\left(n-\frac{1}{2}\right);\ \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right[$, $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\tan(x+\pi)$$

Periode von $\tan(x)$ ist π .

Graph von $\tan(x)$

K_f ist der Graph von $f(x)=\tan(x)$, $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)\middle|\, n\in\mathbb{Z}\right\}$.