Tangens (Lösungsvorschläge)

Funktionsgleichungen bestimmen

a) $f(x)=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

b) $g(x)=\tan(x)+1$

c) $h(x)=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

d) $k(x)=-\tan(x)$

e) $p(x)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)-2$

f) $q(x)=\tan\left(\frac{1}{3}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Gleichungen

a)
$$\begin{aligned} \tan(x)\cdot\sqrt{3}-3 &= 0 && \mid +3 \\ \tan(x)\cdot\sqrt{3} &= 3 && \mid \div\sqrt{3} \\ \tan(x) &= \frac{3}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\tan(x)=\frac{3}{\sqrt{3}} \underset{\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{3}}{\Rightarrow} x=\frac{\pi}{3}+n\cdot\pi=\pi\left(\frac{1}{3}+n\right)\;;\; n\in\mathbb{Z}$$

n	–2	–1	0	1	2
$x=\pi\left(\frac{1}{3}+n\right)$	$-\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$

$$\Rightarrow\; L=\left\{-\frac{2}{3}\pi,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{7}{3}\pi\right\}$$

b)
$$\begin{aligned} 3\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) &= 4-\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) && \Big| +\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) \\ 4\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) &= 4 && \mid \div 4 \\ \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) &= 1 && \Big| \text{substituiere: } \frac{\pi x}{4}\rightarrow u \\ \tan(u) &= 1 \end{aligned}$$

$$\tan(u)=1 \underset{\arctan(1)=\frac{\pi}{4}}{\Rightarrow} u=\frac{\pi}{4}+n\cdot\pi=\pi\left(\frac{1}{4}+n\right)\;;\; n\in\mathbb{Z}$$

Rücksubstitution: $u\rightarrow\frac{\pi x}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{\pi x}{4} &= \pi\left(\frac{1}{4}+n\right) && \mid \div\pi \\ \frac{x}{4} &= \frac{1}{4}+n && \mid \cdot 4 \\ x &= 1+4n && n\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

n	–2	–1	0	1	2	3	4
$x=1+4n$	–7	–3	1	5	9	13	17

$$\Rightarrow\; L=\{-3\ ,\ 1\ ,\ 5\ ,\ 9\ ,\ 13\}$$

c)
$$\begin{aligned} -\tan(x) &= \sin(x) && \left|\div\tan(x)\right. \\ -1 &= \frac{\sin(x)}{\tan(x)} \\ \cos(x) &= -1 \end{aligned}$$
$$\cos(x)=-1 \underset{\arccos(-1)=\pi}{\Rightarrow} x=\pi+2\pi n=\pi(1+2n)\ ;\ n\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow\ L=\{\pi(1+2n)\,|\,n\in\mathbb{N}\}$$

d)
$$\begin{aligned} 3\cdot\sin(x) &= \sqrt{3}\cdot\cos(x) && \left|\div 3\right. \\ \sin(x) &= \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cos(x) && \left|\div\cos(x)\right. \\ \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan(x) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$
$$\tan(x)=\frac{\sqrt{3}}{3} \underset{\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}}{\Rightarrow} x=\frac{\pi}{6}+\pi n=\pi\left(\frac{1}{6}+n\right)\ ;\ n\in\mathbb{Z}$$

n	–3	–2	–1	0
$x=\pi\left(\frac{1}{6}+n\right)$	$-\frac{17}{6}\pi$	$-\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$	$\frac{\pi}{6}$

e) $\Rightarrow\ L=\left\{-\frac{11}{6}\pi\ ,\ -\frac{5}{6}\pi\right\}$

Funktionsuntersuchungen

1.

a) Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0)=(-\sqrt{3})\tan(0)=0\ \Rightarrow\ S_y=(0|0)$

Schnittpunkte mit der x-Achse: setze $f(x)=0$

$$\begin{aligned} (-\sqrt{3})\tan\left(\frac{x}{6}\right) &= 0 && \left|\div(-\sqrt{3})\right. \\ \tan\left(\frac{x}{6}\right) &= 0 && \left|\text{substituiere: } \frac{x}{6}\rightarrow u\right. \\ \tan(u) &= 0 \end{aligned}$$
$$\tan(u)=0 \underset{\arctan(0)=0}{\Rightarrow} u=\pi n\ ;\ n\in\mathbb{Z}$$

Rücksubstitution: $u\rightarrow\frac{x}{6}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{6} &= \pi n && \left|\cdot 6\right. \\ x &= 6\pi n && ;\ n\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

n	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
$x=6\pi n$	–18π	–12π	–6π	0	6π	12π	18π	24π	30π	36π

$\Rightarrow$ Schnittpunkte mit der x-Achse: $N \in \{(6\pi n|0) | n \in \mathbb{Z} \wedge -2 \le n \le 5\}$

b) Schnittpunkte von K_f und K_h: setze $f(x) = h(x)$:

$$\begin{aligned}
(-\sqrt{3})\cdot\tan\left(\frac{x}{6}\right) &= 2\sin\left(\frac{x}{6}\right) && |\div 2\\
-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tan\left(\frac{x}{6}\right) &= \sin\left(\frac{x}{6}\right) && \Big|\div\tan\left(\frac{x}{6}\right)\\
-\frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{\sin\left(\frac{x}{6}\right)}{\tan\left(\frac{x}{6}\right)} &&\\
\cos\left(\frac{x}{6}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} && \Big|\text{substituiere: } \frac{x}{6}\rightarrow u\\
\cos(u) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} &&
\end{aligned}$$

$$\cos(u) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \underset{\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5}{6}\pi}{\Rightarrow} \begin{cases} u = \frac{5}{6}\pi + 2\pi n \\ \text{oder} \\ u = \frac{7}{6}\pi + 2\pi n \end{cases} ;\quad n \in \mathbb{Z}$$

Rücksubstitution: $u \rightarrow \frac{x}{6}$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{6} &= \frac{5}{6}\pi + 2\pi n && |\cdot 6\\
x &= 5\pi + 12\pi n\\
x &= \pi(5+12n)
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\frac{x}{6} &= \frac{7}{6}\pi + 2\pi n && |\cdot 6\\
x &= 7\pi + 12\pi n\\
x &= \pi(7+12n)
\end{aligned}$$

n	–2	–1	0	1	2	3
$x=\pi(5+12n)$	–19π	–7π	5π	17π	29π	41π
$x=\pi(7+12n)$	–17π	–9π	7π	19π	31π	43π

$\Rightarrow$ K_f und K_h haben 7 gemeinsame Kurvenpunkte.

2. Schnittstellen berechnen: setze $f(x)=h(x)$

$$\begin{aligned} 2\sin(x) &= \sqrt{12}\cdot\cos(x) \quad \mid \div 2 \\ \sin(x) &= \frac{\sqrt{12}}{2}\cdot\cos(x) \quad \mid \div\cos(x) \\ \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}} \\ \tan(x) &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\tan(x)=\sqrt{3} \underset{\arctan(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}}{\Rightarrow} x=\frac{\pi}{3}+n\cdot\pi=\pi\left(\frac{1}{3}+n\right)\ ;\ n\in\mathbb{Z}$$

$x\in[0;\ 3\pi]$

n	-1	0	1	2	3
$x=\pi\left(\frac{1}{3}+n\right)$	$-\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$	$\frac{10}{3}\pi$

Schnittpunkte berechnen:

$$x=\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad y=2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3} \ \Rightarrow\ S_1=\left(\frac{\pi}{3}\middle|\sqrt{3}\right)$$

$$x=\frac{4}{3}\pi \quad \Rightarrow \quad y=2\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3} \ \Rightarrow\ S_2=\left(\frac{4}{3}\pi\middle|-\sqrt{3}\right)$$

$$x=\frac{7}{3}\pi \quad \Rightarrow \quad y=2\sin\left(\frac{7}{3}\pi\right)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3} \ \Rightarrow\ S_3=\left(\frac{7}{3}\pi\middle|\sqrt{3}\right)$$

3. Aus dem Schaubild ist zu erkennen, dass K_f und die Mittellinie von K_f durch die Hochpunkte von K_h gehen.

Es ist $h(x)=\frac{3}{2}\cos(4\pi x-\pi)+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}\cos\left(4\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right)+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow\ b=\frac{1}{4}$. Da die Periode des Tangens halb so lang wie die des Kosinus ist muss

$k=\frac{4\pi}{2}=2\pi$ sein.

Für c gilt: $c=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{7}{4}$