

Trigonometrische Funktionen

Tangens (Lösungsvorschläge)

Funktionsgleichungen bestimmen

a) $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $h(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

e) $p(x) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 2$

b) $g(x) = \tan(x) + 1$

d) $k(x) = -\tan(x)$

f) $q(x) = \tan\left(\frac{1}{3}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{a) } \tan(x) \cdot \sqrt{3} - 3 &= 0 & | +3 \\ \tan(x) \cdot \sqrt{3} &= 3 & | \div \sqrt{3} \\ \tan(x) &= \frac{3}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\tan(x) = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi = \pi \left(\frac{1}{3} + n\right); \quad n \in \mathbb{Z}$$

n	-2	-1	0	1	2
$x = \pi \left(\frac{1}{3} + n\right)$	$-\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$

$$\Rightarrow L = \left\{ -\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{7}{3}\pi \right\}$$

b) $3 \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 4 - \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) \quad | + \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)$

$$4 \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 4 \quad | \div 4$$

$$\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 1 \quad \left| \text{substituiere: } \frac{\pi x}{4} \rightarrow u \right.$$

$$\tan(u) = 1$$

$$\tan(u) = 1 \Rightarrow \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \quad u = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi = \pi \left(\frac{1}{4} + n\right); \quad n \in \mathbb{Z}$$

Rücksubstitution: $u \rightarrow \frac{\pi x}{4}$

$$\frac{\pi x}{4} = \pi \left(\frac{1}{4} + n\right) \quad | \div \pi$$

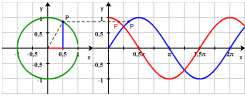
$$\frac{x}{4} = \frac{1}{4} + n \quad | \cdot 4$$

$$x = 1 + 4n \quad n \in \mathbb{Z}$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4
$x = 1 + 4n$	-7	-3	1	5	9	13	17

$$\Rightarrow L = \{-3, 1, 5, 9, 13\}$$





Trigonometrische Funktionen

c) $-\tan(x) = \sin(x) \quad | \div \tan(x)$
 $-1 = \frac{\sin(x)}{\tan(x)}$
 $\cos(x) = -1$
 $\cos(x) = -1 \xrightarrow{\arccos(-1)=\pi} x = \pi + 2\pi n = \pi(1+2n); n \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow L = \{\pi(1+2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

d) $3 \cdot \sin(x) = \sqrt{3} \cdot \cos(x) \quad | \div 3$
 $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \cos(x) \quad | \div \cos(x)$
 $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 $\tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 $\tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}} x = \frac{\pi}{6} + \pi n = \pi\left(\frac{1}{6} + n\right); n \in \mathbb{Z}$

n	-3	-2	-1	0
$x = \pi\left(\frac{1}{6} + n\right)$	$-\frac{17}{6}\pi$	$-\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$	$\frac{\pi}{6}$

e) $\Rightarrow L = \left\{-\frac{11}{6}\pi, -\frac{5}{6}\pi\right\}$

Funktionsuntersuchungen

1.

a) Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = (-\sqrt{3})\tan(0) = 0 \Rightarrow S_y = (0|0)$

Schnittpunkte mit der x-Achse: setze $f(x) = 0$

$$(-\sqrt{3})\tan\left(\frac{x}{6}\right) = 0 \quad | \div (-\sqrt{3})$$

$$\tan\left(\frac{x}{6}\right) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{substituiere: } \frac{x}{6} \rightarrow u \\ \tan(u) = 0 \end{array} \right.$$

$$\tan(u) = 0 \xrightarrow{\arctan(0)=0} u = \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

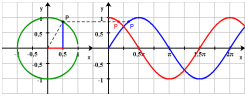
Rücksubstitution: $u \rightarrow \frac{x}{6}$

$$\frac{x}{6} = \pi n \quad | \cdot 6$$

$$x = 6\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x = 6\pi n$	-18π	-12π	-6π	0	6π	12π	18π	24π	30π	36π





Trigonometrische Funktionen

⇒ Schnittpunkte mit der x-Achse: $N \in \{(6\pi n | 0) \mid n \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq n \leq 5\}$

b) Schnittpunkte von K_f und K_h : setze $f(x) = h(x)$:

$$(-\sqrt{3}) \cdot \tan\left(\frac{x}{6}\right) = 2 \sin\left(\frac{x}{6}\right) \quad | \div 2$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tan\left(\frac{x}{6}\right) = \sin\left(\frac{x}{6}\right) \quad | \div \tan\left(\frac{x}{6}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sin\left(\frac{x}{6}\right)}{\tan\left(\frac{x}{6}\right)}$$

$$\cos\left(\frac{x}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left| \text{substituiere: } \frac{x}{6} \rightarrow u \right.$$

$$\cos(u) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(u) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} u = \frac{5}{6}\pi + 2\pi n \\ \text{oder} \\ u = \frac{7}{6}\pi + 2\pi n \end{array} \right\} ; n \in \mathbb{Z}$$

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi$

Rücksubstitution: $u \rightarrow \frac{x}{6}$

$$\frac{x}{6} = \frac{5}{6}\pi + 2\pi n \quad | \cdot 6$$

$$x = 5\pi + 12\pi n$$

$$x = \pi(5 + 12n)$$

oder

$$\frac{x}{6} = \frac{7}{6}\pi + 2\pi n \quad | \cdot 6$$

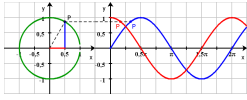
$$x = 7\pi + 12\pi n$$

$$x = \pi(7 + 12n)$$

n	-2	-1	0	1	2	3
$x = \pi(5 + 12n)$	-19π	-7π	5π	17π	29π	41π
$x = \pi(7 + 12n)$	-17π	-9π	7π	19π	31π	43π

⇒ K_f und K_h haben 7 gemeinsame Kurvenpunkte.





Trigonometrische Funktionen

2. Schnittstellen berechnen: setze $f(x) = h(x)$

$$2 \sin(x) = \sqrt{12} \cdot \cos(x) \quad | \div 2$$

$$\sin(x) = \frac{\sqrt{12}}{2} \cdot \cos(x) \quad | \div \cos(x)$$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{4}}$$

$$\tan(x) = \sqrt{3}$$

$$\tan(x) = \sqrt{3} \xrightarrow{\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}} x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi = \pi \left(\frac{1}{3} + n \right); \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x \in [0; 3\pi]$$

n	-1	0	1	2	3
$x = \pi \left(\frac{1}{3} + n \right)$	$-\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{7}{3}\pi$	$\frac{10}{3}\pi$

Schnittpunkte berechnen:

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow S_1 = \left(\frac{\pi}{3} \mid \sqrt{3}\right)$$

$$x = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow y = 2 \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} \Rightarrow S_2 = \left(\frac{4}{3}\pi \mid -\sqrt{3}\right)$$

$$x = \frac{7}{3}\pi \Rightarrow y = 2 \sin\left(\frac{7}{3}\pi\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow S_3 = \left(\frac{7}{3}\pi \mid \sqrt{3}\right)$$

3. Aus dem Schaubild ist zu erkennen, dass K_f und die Mittellinie von K_f durch die Hochpunkte von K_h gehen.

$$\text{Es ist } h(x) = \frac{3}{2} \cos(4\pi x - \pi) + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \cos\left(4\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right) + \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow b = \frac{1}{4}$. Da die Periode des Tangens halb so lang wie die des Kosinus ist muss

$$k = \frac{4\pi}{2} = 2\pi \text{ sein.}$$

$$\text{Für } c \text{ gilt: } c = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}$$

