Der Logarithmus

Strenge Monotonie

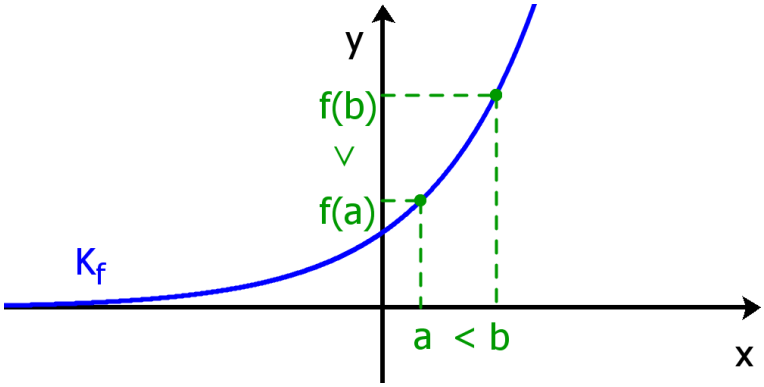
f ist eine Funktion. Wenn für $a,b \in D_f$ gilt, dass

$a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$ dann ist f **streng monoton steigend**
$a<b \Rightarrow f(b)<f(a)$ dann ist f **streng monoton fallend**

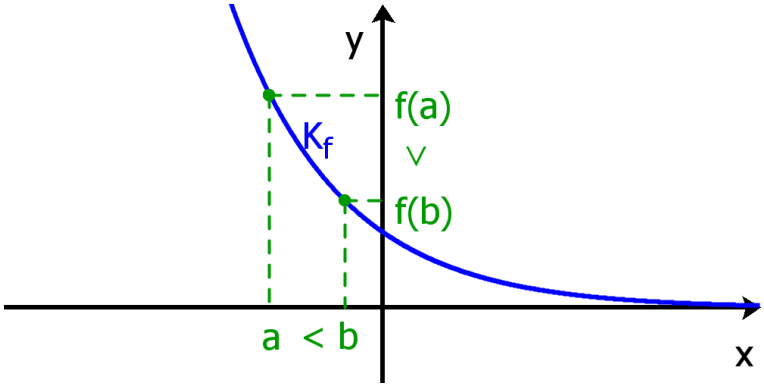
Exponentialfunktionen deren Basis ungleich 1 sind, sind immer streng monoton:

$f(x)=b^x$, $0<b \wedge b \neq 1$ und $x \in \mathbb{R}$:

$1<b$: f ist streng monoton steigend.



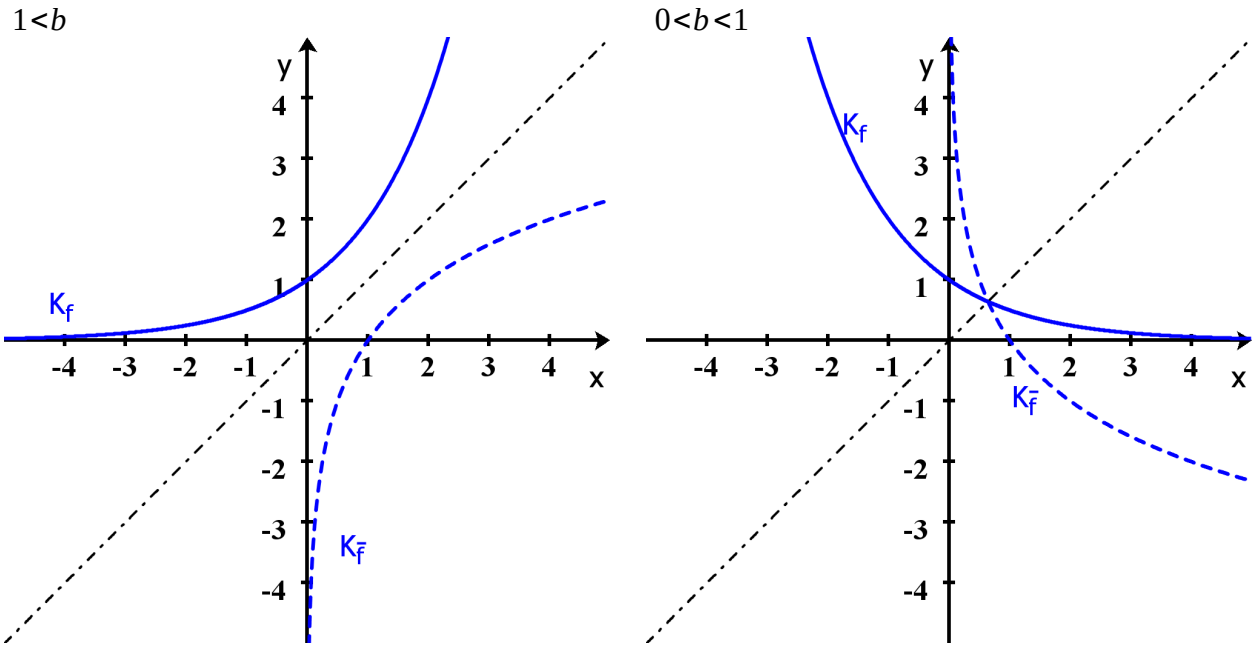
$0<b<1$: f ist streng monoton fallend.



Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2020 Henrik Horstmann

Umkehrfunktion der Exponentialfunktionen

Da die Exponentialfunktion $f(x)=b^x$, $0<b\wedge b\neq 1$ und $x\in\mathbb{R}$ stetig und streng monoton steigend/fallend ist, existiert eine Umkehrfunktion. Der Graph der Umkehrfunktion ergibt sich durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden:



Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion wird **Logarithmusfunktion** genannt und mit $\log$ bezeichnet.

Die Logarithmusfunktion ist abhängig von der Basis der Exponentialfunktion:

$$f(x)=b^x\ ,\ \ 0<b\ \wedge\ b\neq 1\ \Rightarrow\ \bar{f}(x)=\log_b(x)$$

Beispiele:

a) $f(x)=2^x\ \Rightarrow\ \bar{f}(x)=\log_2(x)$

b) $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x\ \Rightarrow\ \bar{f}(x)=\log_{\frac{3}{2}}(x)$

c) $f(x)=10^x\ \Rightarrow\ \bar{f}(x)=\log(x)$ (ist keine Basis angegeben, so ist der 10er Logarithmus gemeint)

d) $f(x)=e^x\ \Rightarrow\ \bar{f}(x)=\ln(x)$ (natürlicher Logarithmus)

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2020 Henrik Horstmann

Definions- und Wertebereich

Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion ist der Wertebereich der Funktion und der Wertebereich der Umkehrfunktion ist der Definitionsbereich der Funktion:

Definitionsbereich von $\log_b(x)$: $\mathbb{R}_+^*$

Wertebereich von $\log_b(x)$: $\mathbb{R}$

Rechnen mit Logarithmen

$b>0 \ \wedge \ b\neq 1$ dann ist

1) $b^n=c \ \Leftrightarrow \ \log_b(c)=n$

Daraus lassen sich verschiedene Rechenregeln für den Logarithmus ableiten:

2) $\log_b(b^n)=n$

Beweis:

$$\log_b(b^n) \underset{1)}{=} \log_b(c) \underset{1)}{=} n$$

3) $b^{\log_b(c)}=c$

Beweis:

$$\log_b(c) \underset{1)}{=} n \ \Leftrightarrow \ b^{\log_b(c)} \underset{1)}{=} b^n \underset{1)}{=} c$$

4) $\log_b(n\cdot m)=\log_b(n)+\log_b(m)$

Bedeutung für den Graphen:
Horizontales Strecken/Stauchen entspricht einem vertikalen Verschieben

Beweis:

$$b^{\log_b(n\cdot m)} \underset{3)}{=} n\cdot m \underset{3)}{=} b^{\log_b(n)}\cdot b^{\log_b(m)} \underset{\text{Potenzgesetze}}{=} b^{\log_b(n)+\log_b(m)}$$

$$\Leftrightarrow \ \log_b(n\cdot m)=\log_b(n)+\log_b(m)$$

5) $\log_b\left(n^m\right)=m\cdot\log_b(n)$

Beweis:

$$b^{\log_b\left(n^m\right)} \underset{3)}{=} n^m \underset{3)}{=} \left(b^{\log_b(n)}\right)^m \underset{\text{Potenzgesetze}}{=} b^{m\cdot\log_b(n)} \ \Leftrightarrow \ \log_b\left(n^m\right)=m\cdot\log_b(n)$$

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2020 Henrik Horstmann

6) $\log_b(n)=\frac{\log_a(n)}{\log_a(b)}$

Beweis:

$b^{\log_b(n)}=n \overset{3)}{\Leftrightarrow} \log_a\left(b^{\log_b(n)}\right)=\log_a(n)$

$\overset{5)}{\Leftrightarrow} \log_b(n)\cdot\log_a(b)=\log_a(n)$

$\Leftrightarrow \log_b(n)=\frac{\log_a(n)}{\log_a(b)}$

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2020 Henrik Horstmann