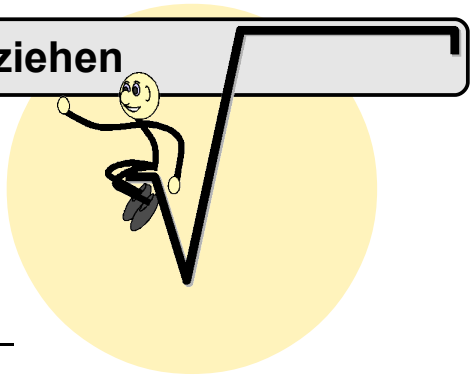
Quadratische Gleichung Lösen: Wurzelziehen



Gegeben ist die Gleichung: $\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

Gesucht sind **alle** x Werte, für die die Gleichung erfüllt ist (Lösungsmenge).

Die verflixten Brüche!

Um die Gleichung zu vereinfachen, sollen zunächst die Brüche „verschwinden“. Dazu werden **beide** Seiten der Gleichung mit dem gemeinsamen Hauptnenner **aller** Brüche multipliziert.

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{8}x+1 &= 1 \quad \left| \cdot 8 (=\text{Hauptnenner}) \right. \\ -12x^2-3x+8 &= 8 \end{aligned}$$

Nach x auflösen

1. Nach x^2 auflösen:

$$\begin{aligned} 3x^2-8 &= 4 \quad \left| +8 \right. \\ 3x^2 &= 12 \quad \left| \div 3 \right. \\ x^2 &= 4 \end{aligned}$$

2. Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen. **Beim Wurzelziehen gibt es zwei Lösungen!**

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \quad \left| \sqrt{} \right. \\ x_1 &= \sqrt{4} \qquad x_1 = 2 \\ x_2 &= -\sqrt{4} \qquad x_2 = -2 \end{aligned}$$

Damit hat die Gleichung folgende Lösungsmenge: $L=\{-2,2\}$

Beispiele

Lösen Sie die quadratischen Gleichungen durch Auflösen nach x^2 und Wurzelziehen.

a) $x^2-\frac{7}{12} = -\frac{1}{3}$ b) $x^2-8=0$ c) $2x^2-8=x^2+17$

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Lösungskarte 1.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Gleichung:

$$x^2+4 = 0$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für x.

b) Begründen Sie schriftlich Ihr Ergebnis.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Gleichung:

$$x^2 = 0$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für x.

b) Begründen Sie schriftlich Ihr Ergebnis.

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Lösungskarte 2.

Ergebnisse

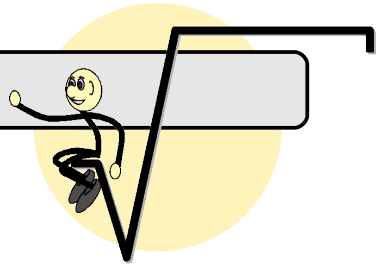
Auflösen der Gleichung $ax^2+c = 0$ nach x^2 ergibt: $x^2 = -\frac{c}{a}$. In welchen Fällen kann die Gleichung gelöst werden?

Bedingung	Anzahl Lösungen
$-\frac{c}{a} > 0$	
$-\frac{c}{a} = 0$	
$-\frac{c}{a} < 0$	

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Lösungskarte 3.

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2010 Henrik Horstmann

Lösungskarte 1



Beispiele

$x^2-\frac{7}{12}=-\frac{1}{3}$

1. Brüche eliminieren:

$$\begin{aligned} x^2-\frac{7}{12} &= -\frac{1}{3} \quad |\cdot 12 \\ 12x^2-7 &= -4 \end{aligned}$$

2. Nach x^2 auflösen:

$$\begin{aligned} 12x^2-7 &= -4 \quad |+7 \\ 12x^2 &= 3 \quad |\div 12 \\ x^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3. Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{4} \quad |\sqrt{\ } \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \\ x_1 &= \frac{1}{2} \qquad x_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$L=\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$

$x^2-8=0$

1. Nach x^2 auflösen:

$$\begin{aligned} x^2-8 &= 0 \quad |+8 \\ x^2 &= 8 \end{aligned}$$

2. Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen:

$$\begin{aligned} x^2 &= 8 \quad |\sqrt{\ } \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{8} \\ x_{1,2} &= \pm 2{,}8384 \end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$L=\{-2{,}8384\,;\,2{,}8384\}$

$2x^2-8=x^2+17$

1. Nach x^2 auflösen:

$$\begin{aligned} 2x^2-8 &= x^2+17 \quad |-x^2-17 \\ x^2-25 &= 0 \quad |+25 \\ x^2 &= 25 \end{aligned}$$

2. Auf beiden Seiten die Wurzel ziehen:

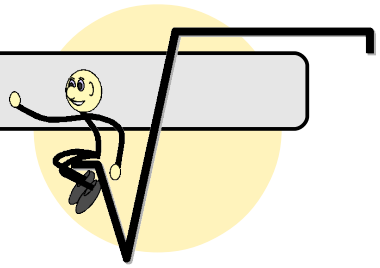
$$\begin{aligned} x^2 &= 25 \quad |\sqrt{\ } \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{25} \\ x_1 &= 5 \\ x_2 &= -5 \end{aligned}$$

Lösungsmenge:

$L=\{5;-5\}$

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2010 Henrik Horstmann

Lösungskarte 2



Aufgabe 1

Gegeben ist die Gleichung:

$$x^2+4 = 0$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für x.

b) Begründen Sie schriftlich Ihr Ergebnis.

Lösung:

zu a) und b) Gegeben ist $x^2+4=0$:

$$\begin{aligned} x^2+4 &= 0 \quad |-4 \\ x^2 &= -4 \end{aligned}$$

Da $x^2<0$ ist, gibt es keine Lösung.

$\Rightarrow L=\emptyset$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Gleichung:

$$x^2 = 0$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für x.

b) Begründen Sie schriftlich Ihr Ergebnis.

Lösung:

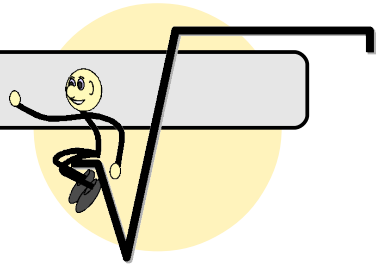
c) zu a) und b) Gegeben ist $x^2=0$:

$x^2=0$ damit ist nach dem Satz vom Nullprodukt auch $x=0$.

$\Rightarrow L=\{0\}$

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2010 Henrik Horstmann

Lösungskarte 3



Ergebnisse

Auflösen der Gleichung $a\,x^2+c\;=\;0$ nach x^2 ergibt: $x^2\;=\;-\frac{c}{a}$.

In welchen Fällen kann die Gleichung gelöst werden?

Bedingung	Anzahl Lösungen	
$-\frac{c}{a}\;\begin{cases}>0\\=0\\<0\end{cases}$	zwei	(Gleichung kann gelöst werden)
	Ein (doppelte)	(Gleichung kann gelöst werden)
	keine	(Gleichung kann **nicht** gelöst werden)

Dieses Werk ist lizenziert unter einer
Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2010 Henrik Horstmann