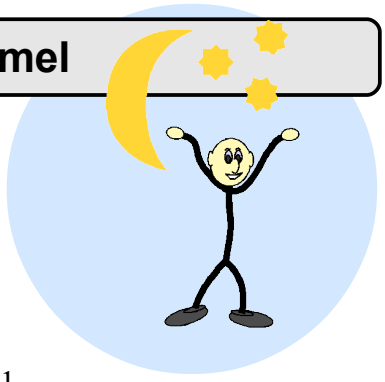
Quadratische Gleichung Lösen: Lösungsformel



Gegeben ist die Gleichung: $x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Gesucht sind **alle** x Werte, für die die Gleichung erfüllt ist (Lösungsmenge).

Die verflixten Brüche!

Um die Gleichung zu vereinfachen, sollen zunächst die Brüche „verschwinden“. Dazu werden **beide** Seiten der Gleichung mit dem gemeinsamen Hauptnenner **aller** Brüche multipliziert.

$$\begin{aligned} x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{6} &= \frac{1}{2} \quad \left| \cdot 6 \ (=\text{Hauptnenner}) \right. \\ 6x^2+x+1 &= 3 \end{aligned}$$

Nach x auflösen

Zunächst muss die Gleichung in Nullform gebracht werden:

$$\begin{aligned} 6x^2+x+1 &= 3 \quad \left| -3 \right. \\ 6x^2+x-2 &= 0 \end{aligned}$$

Gleichungen der Form $a x^2+b x+c=0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $c \neq 0$ werden mit der Lösungsformel gelöst:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Die Lösungsformel gilt nur, wenn die Gleichung in 0-Form ist!

$a=6$, $b=1$ und $c=-2$ in die Formel einsetzen und berechnen:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12}$$

$\Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}$ und $x_2 = \frac{1}{2}$. Damit ist die Lösungsmenge $L = \left\{ -\frac{2}{3}; \frac{1}{2} \right\}$.

Beispiele

Lösen Sie die quadratischen Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel.

a) $\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=0$ b) $-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}=0$

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Lösungskarte 1.

Aufgabe

Gegeben ist die Gleichung:

$$3x^2-2x+1=0$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für x.
b) Begründen Sie schriftlich Ihr Ergebnis.

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Lösungskarte 2.

Ergebnisse

Der Term unter der Wurzel wird **Diskriminante** genannt und mit **D** bezeichnet $(D = b^2-4ac)$. Von ihr hängt die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung ab. Vervollständigen Sie nebenstehende Tabelle.

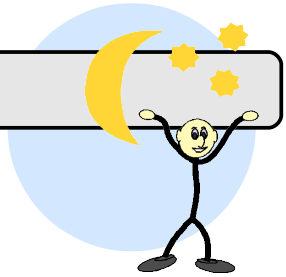
Bedingung		Anzahl Lösungen
b^2-4ac	> 0	
	$= 0$	
	< 0	

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit Hilfe der Lösungskarte 3.

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2010 Henrik Horstmann

Quadratische Gleichung Lösen: Lösungsformel

Lösungskarte 1



Beispiele

$\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3} = 0 \quad |\cdot 3$

$2x^2-2x-4 = 0$

Setze $a=2,\ b=-2,\ c=-4$ in die Lösungsformel ein:

$$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 2\cdot(-4)}}{2\cdot 2}$$
$$= \frac{2\pm\sqrt{4+32}}{4}$$
$$= \frac{2\pm\sqrt{36}}{4}$$
$$= \frac{2\pm 6}{4}$$
$$x_1 = -1$$
$$x_2 = 2$$
$$\Rightarrow L=\{-1;2\}$$

$-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2} = 0 \quad |\cdot 2$

$-x^2+2x+3 = 0$

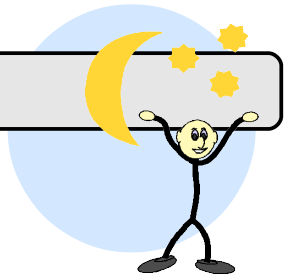
Setze $a=-1,\ b=2,\ c=3$ in die Lösungsformel ein:

$$x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4\cdot(-1)\cdot 3}}{2\cdot(-1)}$$
$$= \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{-2}$$
$$= \frac{-2\pm\sqrt{16}}{-2}$$
$$= \frac{-2\pm 4}{-2}$$
$$x_1 = -1$$
$$x_2 = 3$$
$$\Rightarrow L=\{-1;3\}$$

Dieses Werk ist lizenziert unter einer
Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2010 Henrik Horstmann

Quadratische Gleichung Lösen: Lösungsformel

Lösungskarte 2



Aufgabe

Gegeben ist die Gleichung:

$$3x^2-2x+1=0$$

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für x.

b) Begründen Sie schriftlich Ihr Ergebnis.

Lösung:

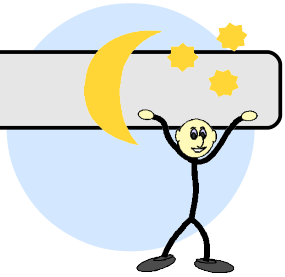
zu a) und b) Setze $a=3$, $b=-2$ und $c=1$ in die Lösungsformel ein:

$$x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3}$$
$$= \frac{2\pm\sqrt{4-12}}{6}$$
$$= \frac{2\pm\sqrt{-8}}{6}$$

Da $\sqrt{-8}$ nicht existiert, gibt es keine Lösung $\Rightarrow L=\emptyset$

Dieses Werk ist lizenziert unter einer
Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2010 Henrik Horstmann

Lösungskarte 3



Ergebnisse

Der Term unter der Wurzel wird **Diskriminante** genannt und mit **D** bezeichnet. $D = b^2 - 4ac$.
Von ihr hängt die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung ab.

Bedingung		**Anzahl Lösungen**
$b^2 - 4ac$	> 0	zwei
	$= 0$	eine (doppelte)
	< 0	keine

Dieses Werk ist lizenziert unter einer
Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2010 Henrik Horstmann