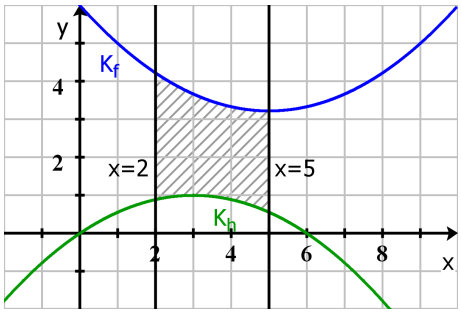
Flächen zwischen zwei Graphen

K_f und K_h sind die Graphen von $f(x)=\frac{1}{9}\left(x^2-10x+54\right)$ und $h(x)=\frac{1}{9}\left(-x^2+6x\right)$.

K_f, K_h und die Geraden mit den Gleichungen $x=2$ und $x=5$ schließen eine Fläche A ein.



Die Größe von A lässt sich wie folgt berechnen:

1. Berechnung der Fläche zwischen den Geraden und K_f:

$$\begin{aligned}A_f&=\int_2^5 f(x)\,dx\\&=\left[\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}x^3-5x^2+54x\right)\right]_2^5\\&=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\cdot 5^3-5\cdot 5^2+54\cdot 5\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3-5\cdot 2^2+54\cdot 2\right)\\&=\frac{560}{27}-\frac{272}{27}=\frac{32}{3}\text{FE}\end{aligned}$$

2. Berechnung der Fläche zwischen den Geraden und K_h:

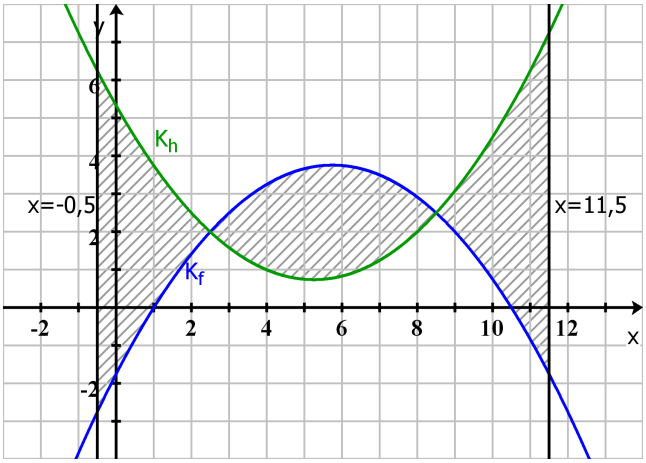
$$\begin{aligned}A_f&=\int_2^5 h(x)\,dx\\&=\left[\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right)\right]_2^5\\&=\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}\cdot 5^3+3\cdot 5^2\right)-\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3+3\cdot 2^2\right)\\&=\frac{100}{27}-\frac{28}{27}=\frac{8}{3}\text{FE}\end{aligned}$$

3. Die Differenz von A_f und A_h ist die gesuchte Größe: $A_f-A_h=\frac{32}{3}-\frac{8}{3}=\frac{24}{3}=8\,\text{FE}$

Merke:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx$$
$$= [F(x)]_a^b - [H(x)]_a^b$$
$$= F(b) - F(a) - (H(b) - H(a))$$
$$= F(b) - F(a) - H(b) + H(a)$$
$$= F(b) - H(b) - F(a) + H(a)$$
$$= F(b) - H(b) - (F(a) - H(a))$$
$$= [F(x) - H(x)]_a^b$$
$$= \int_a^b (f(x) - h(x))\,dx$$

Wenn die Graphen sich schneiden



K_f und K_h sind die Graphen von $f(x) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{16}{3}$ und $h(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{23}{12}x - \frac{7}{4}$.

K_f, K_h und die Geraden mit den Gleichungen $x = -\frac{1}{2}$ und $x = \frac{23}{2}$ schließen eine Fläche A ein.

Die Größe von A lässt sich wie folgt berechnen:

1. Bestimme die Schnittstellen von K_f und K_h:

$$f(x)-h(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^2-\frac{11}{3}x+\frac{85}{12}=0 \Rightarrow 4x^2-44x+85=0 \underset{\text{Lösungsformel}}{\Rightarrow} x=\frac{5}{2} \vee \frac{17}{2}$$

2. Berechne den Flächeninhalt:

$$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}(f(x)-h(x))dx+\int_{\frac{17}{2}}^{\frac{5}{2}}(f(x)-h(x))dx\int_{\frac{17}{2}}^{\frac{23}{2}}(f(x)-h(x))dx$$

$$=\left[\frac{1}{9}x^3-\frac{11}{6}x^2+\frac{85}{12}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}+\left[\frac{1}{9}x^3-\frac{11}{6}x^2-\frac{85}{12}\right]_{\frac{17}{2}}^{\frac{5}{2}}+\left[\frac{1}{9}x^3-\frac{11}{6}x^2-\frac{85}{12}\right]_{\frac{17}{2}}^{\frac{23}{2}}$$

$$=\frac{575}{72}-\left(-\frac{289}{72}\right)+\frac{575}{72}-\left(-\frac{289}{72}\right)+\frac{575}{72}-\left(-\frac{289}{72}\right)$$

$$=12+12+12=36\,\text{FE}$$