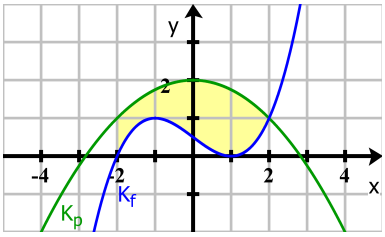
Integralrechnung (Aufgaben)

Aufgabe 1

Sei K_f die Kurve einer Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$. Weiter ist K_p eine nach unten geöffnete Parabel 2. Ordnung. K_p ist symmetrisch zur y-Achse. K_p und K_f schneiden sich im Punkt $P(2 \mid 1)$. Die von K_p, K_f und der Geraden mit der Gleichung $x=-2$ eingeschlossene Fläche hat einen Inhalt von $\frac{14}{3}$FE. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung zu K_p.

Lösung:



Allgemeine Funktionsgleichung zu K_p: $p(x)=a\,x^2+c$

Da die Funktionsgleichung zwei Unbekannte enthält, werden zwei Gleichungen benötigt:

1. $P(2 \mid 1)$ ist Kurvenpunkt $\Rightarrow$ $p(2)=4a+c=1$.
2. $\int_{-2}^{2}(p(x)-f(x))dx=\frac{14}{3}$

$$\int_{-2}^{2}(p(x)-f(x))dx$$
$$=\int_{-2}^{2}\left(a\,x^2+c-\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\right)\right)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{4}x^3+a\,x^2+\frac{3}{4}x+c-\frac{1}{2}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{3}a\,x^3+\frac{3}{8}x^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)x\right]_{-2}^{2}$$
$$=\frac{8}{3}a+2c-\frac{1}{2}-\left(-\frac{8}{3}a-2c+\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{8}{3}a+c-\frac{1}{2}+\frac{8}{3}a-c-\frac{3}{2}$$
$$=\frac{16}{3}a+4c-2$$
$$\Rightarrow\ \frac{16}{3}a+4c-2=\frac{14}{3}\ \Rightarrow\ \frac{16}{3}a+4c=\frac{20}{3}$$

Es ergibt sich das LGS:

$$\left|\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 1 \\ \frac{16}{3} & 4 & \frac{20}{3} \end{array}\right|$$

$\Rightarrow$

$$a = -\frac{1}{4}$$
$$c = 2$$
$$\Rightarrow\ p(x)=-\frac{1}{4}x^2+2$$

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2011 Henrik Horstmann

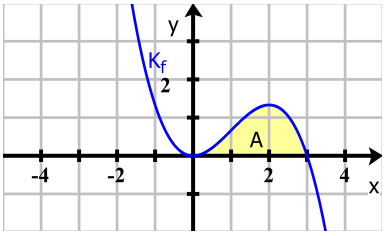
Aufgabe 2

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2$ und K_f die Kurve zu f. K_f und die x-Achse schließen eine Fläche A ein.

1. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A.
2. Die Gerade mit der Gleichung $x=2$ unterteilt die Fläche A in zwei Teilflächen. Berechnen Sie die Differenz der beiden Teilflächen.
3. Die Gerade mit der Gleichung $x=u$ $(u\in[0;3])$ unterteilt die Fläche A in zwei Teilflächen. Bestimmen Sie u so, dass die Differenz der beiden Teilflächen $2\,\text{FE}$ beträgt.

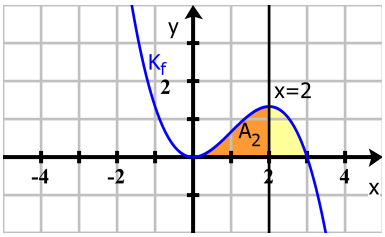
Lösung:

1. Nullstellen von K_f: Setze $f(x)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=3$



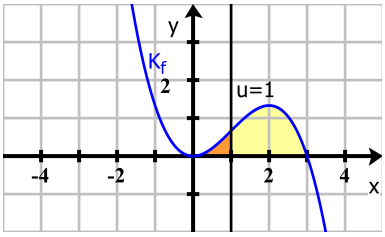
$$A=\int_0^3 (f(x))dx$$
$$=\int_0^3 \left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^3$$
$$=\frac{9}{4}\,\text{FE}$$

2. $$A_2=\int_0^2 (f(x))dx$$



$$=\int_0^2 \left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{4}{3}\,\text{FE}$$
$$\frac{9}{4}-\frac{4}{3}=\frac{11}{12}\,\text{FE}\quad\text{(Differenz)}$$

3. $$A_u=\int_0^u (f(x))dx$$



$$=\int_0^u \left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^u$$
$$=-\frac{1}{12}u^4+\frac{1}{3}u^3\,\text{FE}$$
$$\frac{9}{4}-\left(-\frac{1}{12}u^4+\frac{1}{3}u^3\right)=2\,\text{FE} \Rightarrow \frac{1}{12}u^4-\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{4}=0$$

Löse die Gleichung näherungsweise: $x_1=1$ oder $x_2=3{,}95137$
Es kommt nur x_1 in Betracht, da x_2 rechts der Nullstelle von K_f liegt.
$\Rightarrow u=1$.

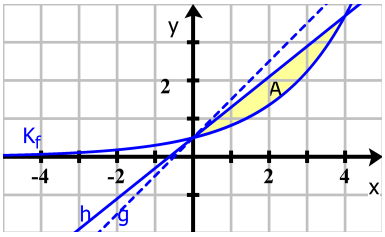
Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2011 Henrik Horstmann

Aufgabe 3

Sei K_f das Schaubild von f mit $f(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ und g eine Gerade mit der Gleichung $y=x+\frac{1}{2}$.

1. g soll um den Punkt $P\left(0 \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)$ so gedreht werden, dass sie K_f im Punkt $S\left(4 \,\middle|\, \frac{e^2}{2}\right)$ schneidet. Diese neue Gerade soll h heißen. Geben Sie eine exakte Gleichung von h an.
2. Zeigen Sie, das h und K_f nur zwei Schnittpunkte haben.
3. h und K_f schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche.

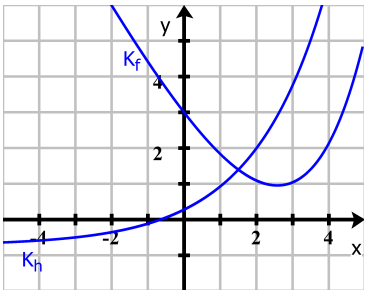
Lösung:



1. h ist die Gerade, die durch die Punkte P und S geht. Da P auf der y-Achse liegt $\Rightarrow$ $h\colon y=mx+\frac{1}{2}$.

   Mit S ergibt sich: $\frac{e^2}{2}=4m+\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $h\colon y=\frac{e^2-1}{8}x+\frac{1}{2}$
2. P und S sind Schnittpunkte von h und K_f. Da K_f auf dem ganzen Definitionsbereich links gekrümmt ist, kann es keine weiteren Schnittpunkte geben.
3. $$A=\int_0^4\left(\frac{e^2-1}{8}x+\frac{1}{2}-f(x)\right)dx=\int_0^4\left(\frac{e^2-1}{8}x+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)\right)dx=\int_0^4\left(\frac{e^2-1}{8}x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)dx$$
   $$=\left[\frac{e^2-1}{16}x^2+\frac{1}{2}x-e^{\frac{x}{2}}\right]_0^4=2\,\text{FE}$$

Aufgabe 4



Gegeben sind die Funktionen f und h mit $f(x)=e^{\frac{x}{2}}-\frac{2}{3}ex+2$ und $h(x)=e^{\frac{x}{2}}-e+2$. Bestimmen Sie eine Zahl für $u>0$, so dass folgende Gleichung gilt: $\int_0^u (f(x)-h(x))dx=0$.

Erklären Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe von zwei geeigneten Flächenstücken und markieren Sie diese im nebenstehenden Schaubild.

Lösung:

$$f(x)-h(x)=e^{\frac{x}{2}}-\frac{2}{3}ex+2-\left(e^{\frac{x}{2}}-e+2\right)=e^{\frac{x}{2}}-\frac{2}{3}ex+2-e^{\frac{x}{2}}+e-2=-\frac{2}{3}ex+e$$

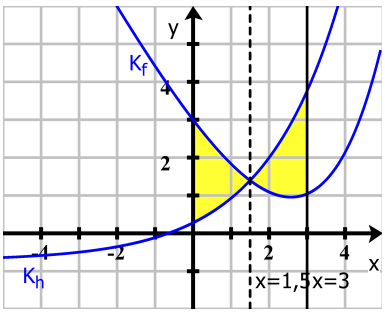
$$\Rightarrow \int_0^u (f(x)-h(x))dx=\int_0^u\left(-\frac{2}{3}ex+e\right)dx=\left[-\frac{1}{3}ex^2+ex\right]_0^u=-\frac{1}{3}eu^2+eu$$

Löse die Gleichung: $-\frac{1}{3}eu^2+eu=0$ $\Rightarrow$ $u=0 \lor u=3$

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2011 Henrik Horstmann

Da $u>0$ gefordert war, kommt nur $u=3$ in Betracht.

Erklärung des Ergebnisses:



Die von K_f und K_h eingeschlossenen Flächen in den Intervallen $[0;1{,}5]$ und $[1{,}5;3]$ sind gleich groß. Da sich die Lage von K_f zu K_h an der Stelle $x=1{,}5$ ändert, haben die Integrale auf den beiden Intervallen unterschiedliche Vorzeichen, womit sich die Werte aufheben.

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2011 Henrik Horstmann