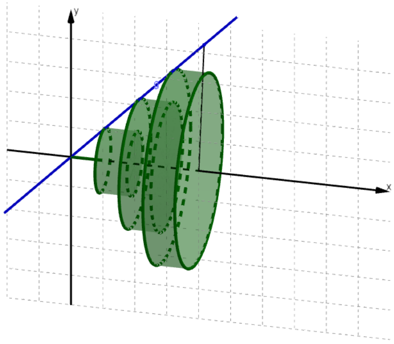
Näherungsweise Bestimmung des Volumen von Rotationskörpern

Werden die Rechtecke zur Berechnung der Untersumme um die x-Achse rotiert, so entsteht ein Turm aus Zylindern.



Das Volumen dieses Turms ist eine untere Abschätzung für das Volumen des Körpers der entsteht, wenn die Kurve um die x-Achse rotiert.

Wenn der Turm die Höhe b hat und aus n Zylindern besteht, dann lässt sich sein Volumen mit

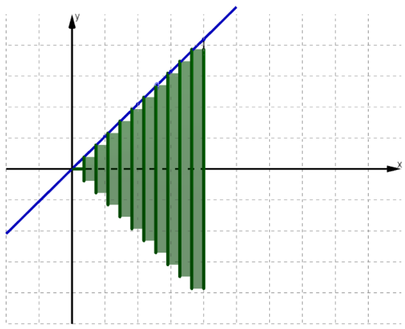
$$V_{Turm}=\sum_{i=0}^{n-1}\pi\cdot\left(f(i\cdot dx)\right)^2\cdot dx=\pi\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(i\cdot dx)\right)^2\cdot dx \quad ; \qquad dx=\frac{b}{n}$$

berechnen.

Gleiches gilt für die Obersumme.

Integralrechnung als Helfer

Um die Näherungsberechnung zu präzisieren kann die Anzahl n der Zylinder erhöht werden.



Daraus ergibt sich direkt die Frage, was passiert, wenn n gegen unendlich strebt.

$$\lim_{n\to\infty} \pi \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(i \cdot dx)\right) \cdot dx = \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(i \cdot dx)\right)^2 \cdot dx$$

$$\underset{h(x)=(f(x))^2}{=} \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} h(i \cdot dx) \cdot dx = \pi \cdot \int_0^b h(x)\, dx = \pi \cdot \int_0^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

Volumen von Rotationskörper

f ist eine stetige und Riemann integrierbare Funktion. K_f ist die Kurve von f und K der Körper, der entsteht, wenn der Kurvenabschnitt K_f im Intervall $[a;\ b]$ um die x-Achse rotiert.

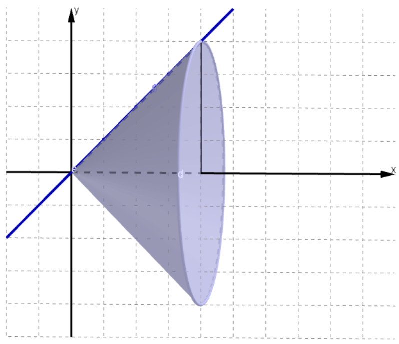
Das Volumen von K lässt sich dann folgendermaßen berechnen:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

Beispiel

$f(x) = x\ ,\ \ x \in \mathbb{R}$

Beim rotieren des Graphen von f um die *x*-Achse entsteht im Intervall $[0;\ b]$ ein Kegel.



Das Volumen des Kegels ist

$$V = \pi \cdot \int_0^b x^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^b = \frac{\pi}{3} b^3$$