Exponentialfunktionen: Gleichungen (1)

Um was geht es?

Durch das Modellieren mit Hilfe von Exponentialfunktionen können Sachverhalte beschrieben werden. Um aus den Modellen auch Schlussfolgerungen ziehen zu können ist es unter anderem nötig Gleichungen der folgenden Art zu lösen:

Suchen Sie für die folgenden Gleichungen nach Lösungen für x:

a) $2^x = 8 \Rightarrow x =$ 3

b) $3^x = 9 \Rightarrow x =$ 2

c) $5^x = 625 \Rightarrow x =$ 4

d) $2^x = 128 \Rightarrow x =$ 7

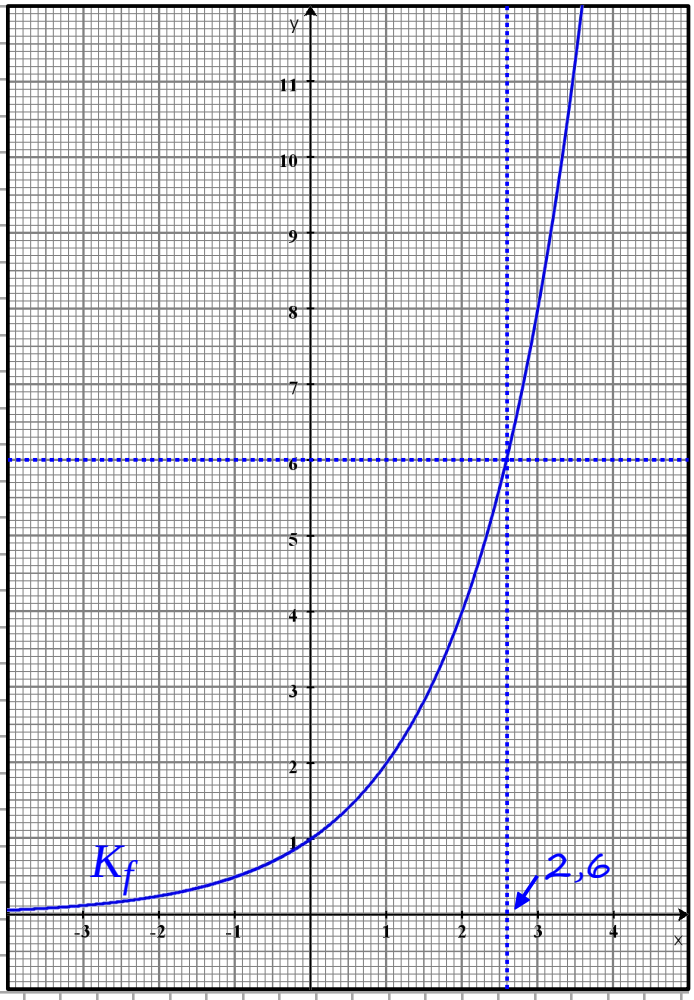
Und wenn es nicht aufgeht?

f ist eine Exponentialfunktion mit $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$. K_f ist das Schaubild von f (Abbildung 1). Gesucht sind Stellen, an denen $f(x) = 6$ ist.

Notieren Sie eine Strategie, nach der der die Lösungen für x bestimmt werden können:

Im Schaubild eine waagerechte Gerade bei y=6 einzeichnen. Durch den Schnittpunkt von der Geraden mit der Kurve eine senkrechte Gerade einzeichnen und an der x-Achse den x-Wert ablesen.
Im Beispiel ist x≈2,6.

*) Alternative Strategien sind am Ende des Dokuments beschrieben.



Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2020 Henrik Horstmann

Was ist noch ungeklärt?

Finden Sie zu folgenden Fragen Antworten und Begründen Sie diese.

Im folgenden ist $f(x)=b^x$, $b>0$ und $x\in\mathbb{R}$.

Wie sieht die Lösungsmenge für x aus, wenn die Gleichung $f(x)=c\leq 0$ ist?

Der Wertebereich von f ist $\mathbb{R}_+^*$, damit kann der Funktionswert nicht kleiner als Null sein. Daraus ergibt sich, dass die Gleichung nicht lösbar ist und somit die Lösungsmenge leer ist.

In welchem Intervall muss x liegen, wenn $f(x)=c$ und $0<c<1$ ist?

Der Graph von f(x) ist streng monoton steigend, nähert sich für $x\to-\infty$ der x-Achse an und schneidet die y-Achse bei y=1. Daraus ergibt sich, dass $0<f(x)<1$ für $x\in\mathbb{R}_-^*$ ist.

In welchem Intervall muss x liegen, wenn $f(x)=c$ und $1\leq c$ ist?

Der Graph von f(x) schneidet die y-Achse bei y=1 und strebt für $x\to\infty$ gegen ∞. Daraus ergibt sich, dass $1<f(x)$ für $x\in\mathbb{R}_+^*$ ist.

Wie groß ist die Lösungsmenge für x, wenn $f(x)=c\in\mathbb{R}$ ist?

Der Graph von f(x) ist streng monoton steigend $\Rightarrow$ zu jedem $c>0$ gibt es genau ein $x\in\mathbb{R}$, so dass $f(x)=c$ ist $\Rightarrow$ die Lösungsmenge für x für die Gleichung $f(x)=c$ enthält für $c>0$ genau ein Element und für $c\leq 0$ ist sie leer.

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2020 Henrik Horstmann

Alternative Strategien

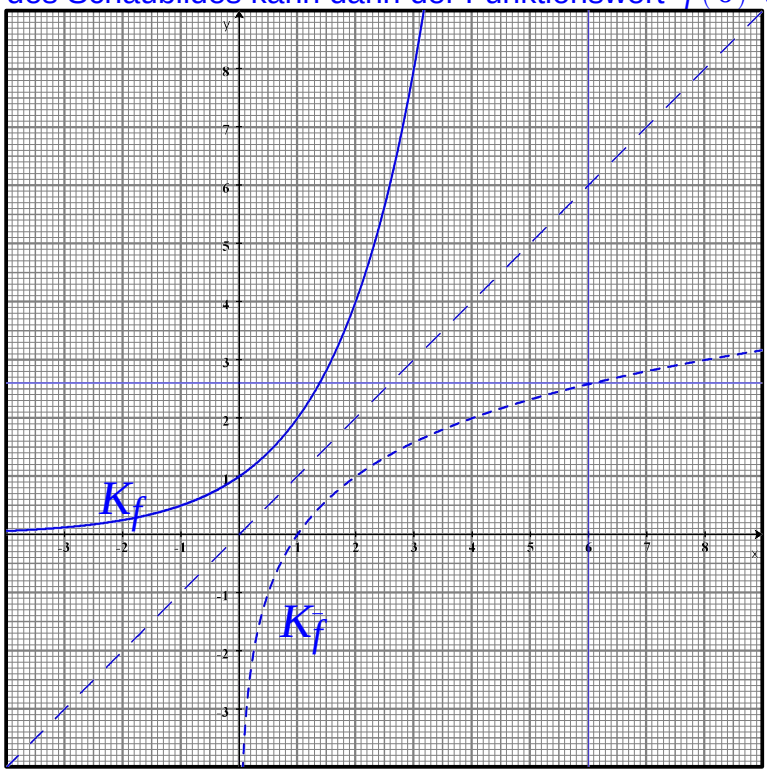
Alternative Strategien zu „Und wenn es nicht aufgeht?“

1. Zunächst werden Werte in den unmittelbaren Umgebung von 6 betrachtet, bei denen x ganzzahlig ist: $f(x)=4 \Rightarrow x=2$ und $f(x)=8 \Rightarrow x=3$.

   Mit Hilfe einer Intervallschachtelung kann nun eine Näherungslösung für x bestimmt werden:

$f(x)=$ $2^x = 6$																	$x \approx$ 6,0367
	X		X	X	X				X								X
$x=$ 2 +	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{19}{32}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{21}{32}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{23}{32}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{29}{32}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	1
$f(x)=$	5,6569		5,9073	6,0367	6,1688				6,7272								∞

2. Da $f(x)$ eine Exponentialfunktion ist, ist sie streng monoton steigend. Damit gibt es eine Umkehrfunktion $\bar{f}(x)$ zu $f(x)$ und es ist $f(x)=6 \Rightarrow x=\bar{f}(6)$. Näherungsweise kann $\bar{f}(6)$ dadurch bestimmt werden, dass K_f an der ersten Winkelhalbierenden gespiegelt wird, so das der Graph von $\bar{f}$ entsteht. Mit Hilfe des Schaubildes kann dann der Funktionswert $\bar{f}(6)$ abgelesen werden.



Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.
2020 Henrik Horstmann