Lösungen zu Aufgaben zur momentanen Änderungsrate

Änderungsraten berechnen

a)

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x_1 \to 3} \frac{f(3)-f(x_1)}{3-x_1} \\ &= \lim_{x_1 \to 3} \frac{3^2-x_1^2}{3-x_1} \\ &= \lim_{x_1 \to 3} \frac{(3-x_1)\cdot(3+x_1)}{3-x_1} \\ &= \lim_{x_1 \to 3} 3+x_1 \\ &= 3+3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2-3^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{9+6h+h^2-9}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{6h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 6+h \\ &= 6 \end{aligned}$$

b)

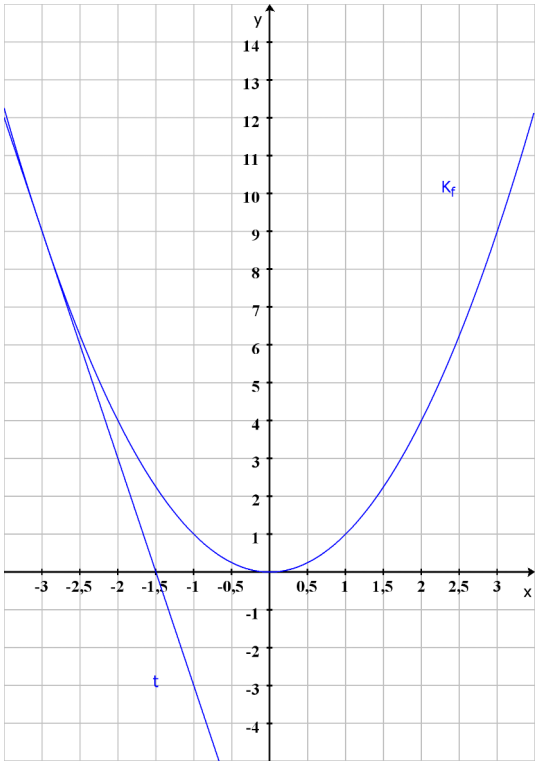
$$\begin{aligned} m &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^4-2^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{16+32h+24h^2+8h^3+h^4-16}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{32h+24h^2+8h^3+h^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 32+24h+8h^2+h^3 \\ &= 32 \end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{4}+h\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4}+h\right)^3-\left(\frac{1}{4}\right)^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{64}+\frac{3}{64}h+\frac{3}{4}h^2+h^3-\frac{1}{64}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{64}h+\frac{3}{4}h^2+h^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3}{64}+\frac{3}{4}h+h^2\\
&= \frac{3}{64}
\end{aligned}
$$

Tangenten

a) $f(-3)=9 \Rightarrow$ Berührpunkt $P=(-3|9)$
Aufgrund der Symmetrieeigenschaften von f ist die Steigung $m_t=-6$
$\Rightarrow$ Tangentengleichung $y=-6(x+3)+9=-6x-9$

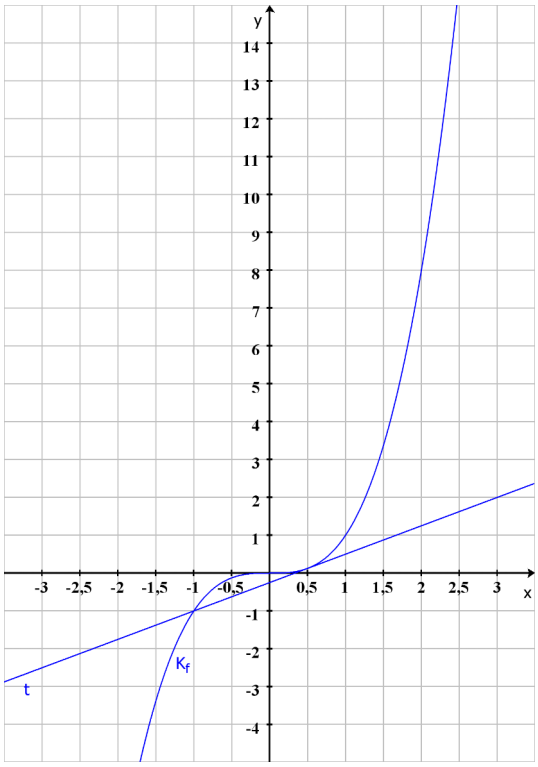


b) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$ $\Rightarrow$ Berührpunkt $P=\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{8}\right)$

$$
\begin{aligned}
m_t &= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}+h\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{8}+\frac{3}{4}h+\frac{3}{2}h^2+h^3-\frac{1}{8}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3}{4}h+\frac{3}{2}h^2+h^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3}{4}+\frac{3}{2}h+h^2\\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Steigung $m_t=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ Tangentengleichung $y=\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$

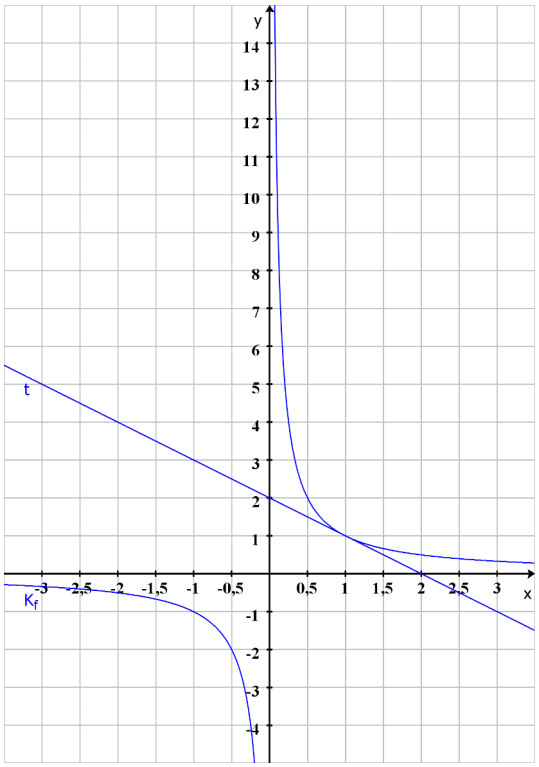


c) $f(1)=1 \Rightarrow$ Berührpunkt $P=(1|1)$

$$
\begin{aligned}
m_t &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1+h}{1+h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-1-h}{1+h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{1+h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}-\frac{h}{(1+h)\cdot h} \\
&= \lim_{h\to 0}-\frac{1}{1-h} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Steigung $m_t=-1$

$\Rightarrow$ Tangentengleichung $y=-1(x-1)+1=-x+2$



Hilfe von der momentanen Änderungsrate

a)
$$\begin{aligned} m &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{3hx^2+3h^2x+h^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}3x^2+3hx+h^2 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2\geq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$

Damit steigt die Kurve außer an der Stelle $x=0$, dort hat sie die Steigung 0.

b)
$$\begin{aligned} m(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}2x+h \\ &= 3x \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ m(-3)=-9=-m(3)$

c) Aufgrund der Symmetrieeigenschaft von K_f (K_f ist symmetrisch zu y-Achse), muss die Steigung der Tangente in einem Punkt $P=(x|f(x))$ gleich der negativen Steigung der Tangente im Punkt $Q=(-x|f(-x))$ sein.

Alternativ:

$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{2n}-x^{2n}}{h}=2n\cdot x^{2n-1}$

weiter ist $2n\cdot(-x)^{2n-1}=-2n\cdot x^{2n-1}$, was zu zeigen war.

Negative Exponenten

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} \quad \text{|Brüche gleichnamig machen}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x}{x(x+h)}-\frac{x+h}{x(x+h)}}{h} \quad \text{|Brüche zusammenfassen}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x^2+hx}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x^2+hx)} \quad \text{|kürzen}$$

$$= \lim_{h\to 0}-\frac{1}{x^2+hx}$$

$$= -\frac{1}{x^2} \quad x\neq 0$$