

---

## Lösungen zu Funktionen (Nullstellen (1))

---



Bestimmen Sie die Nullstellen zu folgenden Funktionen:

a)  $f(x) = 3x^2 + \frac{x}{2} - 1$

Lösung:

Setze  $f(x) = 0$ :

$$3x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0 \quad | \cdot 2$$

$$6x^2 + x - 2 = 0$$

Setze  $a=6$ ,  $b=1$ ,  $c=-2$  in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{12} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} \\ &= \frac{-1 \pm 7}{12} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow N_1\left(\frac{1}{2} \mid 0\right) \quad N_2\left(-\frac{2}{3} \mid 0\right)$$

b)  $f(x) = -\frac{x^2}{5} - 4938x - 30479805$

Lösung:

Setze  $f(x) = 0$ :

$$-\frac{1}{5}x^2 - 4938x - 30479805 = 0 \quad | \cdot 5$$

$$-x^2 - 24690x - 152399025 = 0$$

Setze  $a=-1$ ,  $b=-24690$ ,  $c=-152399025$  in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{24690 \pm \sqrt{(-24690)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-152399025)}}{2 \cdot (-1)} \\ &= \frac{24690 \pm \sqrt{609596100 - 609596100}}{-2} \\ &= \frac{24690 \pm \sqrt{0}}{-2} \\ &= \frac{24690 \pm 0}{-2} \end{aligned}$$

$$x_1 = -12345$$

$$x_2 = -12345$$

$$\Rightarrow N(-12345 \mid 0)$$



c)  $f(x) = 3x^2 - \frac{11}{3}x + 2$

Lösung:

Setze  $f(x) = 0$ :

$$3x^2 - \frac{11}{3}x + 2 = 0 \quad | \cdot 3$$

$$9x^2 - 11x + 6 = 0$$

Setze  $a=9$ ,  $b=-11$ ,  $c=6$  in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 6}}{2 \cdot 9} \\ &= \frac{11 \pm \sqrt{121 - 216}}{18} \\ &= \frac{11 \pm \sqrt{-95}}{18} \end{aligned}$$

$\sqrt{-95}$  hat keine Lösung  $\Rightarrow$  es existieren keine Nullstellen

d)  $f(x) = -x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{5}{2}x$

Lösung:

Setze  $f(x) = 0$ :

$$-x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{5}{2}x = 0 \quad | \cdot 2$$

$$-2x^3 + 7x^2 - 5x = 0$$

$$x(-2x^2 + 7x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ oder } -2x^2 + 7x - 5 = 0$$

Satz vom  
Nullprodukt

$$-2x^2 + 7x - 5 = 0$$

Setze  $a=-2$ ,  $b=7$ ,  $c=-5$  in die Lösungsformel ein:

$$\begin{aligned} x_{2,3} &= \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-5)}}{2 \cdot (-2)} \\ &= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{-4} \\ &= \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{-4} \\ &= \frac{-7 \pm 3}{-4} \end{aligned}$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow N_1(0 \mid 0), \quad N_2(1 \mid 0), \quad N_3\left(\frac{5}{2} \mid 0\right)$$



e)  $f(x) = -\frac{2}{7}x^4 + \frac{4}{7}x^3$

Lösung:

Setze  $f(x) = 0$ :

$$f(x) = 0$$

$$-\frac{2}{7}x^4 + \frac{4}{7}x^3 = 0 \quad | \cdot 7$$

$$-2x^4 + 4x^3 = 0$$

$$x^3(-2x+4) = 0$$

$$\Rightarrow x^3 = 0 \text{ oder } -2x+4=0$$

Satz vom Nullprodukt

$$x_1 = 0$$

$$-2x+4 = 0 \quad | -4$$

$$-2x = -4 \quad | \div (-2)$$

$$x = 2$$

$$\Rightarrow N_1(0 \mid 0), \quad N_2(2 \mid 0)$$



Gegeben ist eine Funktion  $f_a$  mit  $f_a(x) = (x-2)(x^2 - ax - 2x + 2a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$

Lösung:

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen von  $f_a$ .

Lösung:

Setze  $f_a(x) = 0$ :

$$(x-2)(x^2 - ax - 2x + 2a) = 0$$

$$\Rightarrow x=2 \vee x^2 - (a+2)x + 2a = 0$$

Satz vom Nullprodukt

Mit der Lösungsformel ergibt sich:

$$x_{1,2} = \frac{a+2 \pm \sqrt{(a+2)^2 - 4 \cdot 2a}}{2}$$

$$= \frac{a+2 \pm \sqrt{a^2 + 4a + 4 - 8a}}{2}$$

$$= \frac{a+2 \pm \sqrt{a^2 - 4a + 4}}{2}$$

$$= \frac{a+2 \pm \sqrt{(a-2)^2}}{2}$$

$$= \frac{a+2 \pm (a-2)}{2}$$

$$x_1 = a$$

$$x_2 = 2$$

$$\Rightarrow N_{1,2}(2 \mid 0) \quad N_3(a \mid 0)$$



1.2 Für welchen Wert von  $a \in \mathbb{R}$  besitzt  $f_a$  nur eine Nullstelle und wo liegt diese?

Lösung:

Für  $a=2$  gibt es nur die eine Nullstelle  $N(2 \mid 0)$ .

1.3 Begründen Sie, dass  $f_a$  mindestens eine und maximal zwei Nullstellen hat.

Lösung:

Die Rechnung aus 1.1 zeigt, dass  $f_a$  immer die Nullstelle  $N(2 \mid 0)$  hat. Somit existiert mindestens eine Nullstelle. Ist  $a \neq 2$  so existieren zwei Nullstellen  $N(2 \mid 0) \wedge N(a \mid 0)$ .



Gegeben ist die Funktion  $f_a$  mit  $f_a(x) = x^5 - a^2 x^3 - 9x^3 + 9a^2 x$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .  $f_a$  besitzt die Nullstellen  $N(3 \mid 0)$  und  $N(-a \mid 0)$ .

a) Wie viele Nullstellen besitzt  $f_a$  mindestens? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Drei Nullstellen besitzt  $f_a$  mindestens: Zunächst einmal hat  $f_a$  die Nullstelle  $N(3 \mid 0)$ . Da das u Schaubild von  $f_a$  symmetrisch zum Ursprung ist, besitzt  $f_a$  außerdem die Nullstellen  $N(-3 \mid 0)$  und  $N(0 \mid 0)$ . Ist  $a \in [-3; 3]$ , gibt es mindestens 3 Nullstellen.

b) Für welche Werte von  $a \in \mathbb{R}$  hat  $f_a$  mindestens fünf verschiedene Nullstellen? Geben Sie die Nullstellen an.

Lösung:

Für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$  hat  $f_a$  mindestens fünf verschiedene Nullstellen:  $N(3 \mid 0)$ ,  $N(-3 \mid 0)$ ,  $N(0 \mid 0)$ ,  $N(-a \mid 0)$  und  $N(a \mid 0)$ .

