Symmetrie zum Ursprung

Um was geht es?

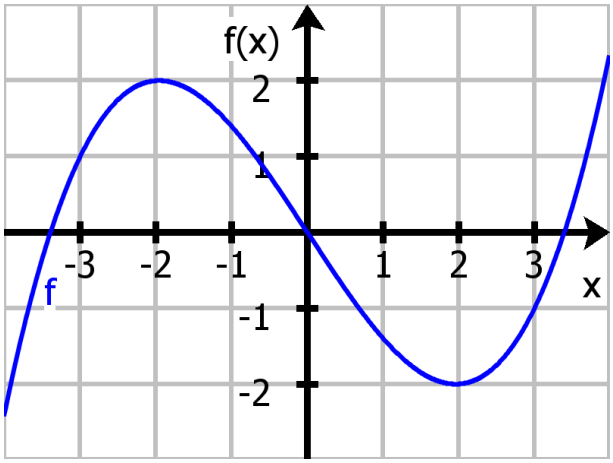
Betrachten wir das Schaubild einer ganzrationalen Funktion mit ungeradem Grad, z.B.:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{2}{15}x^3 - \frac{23}{15}x$$

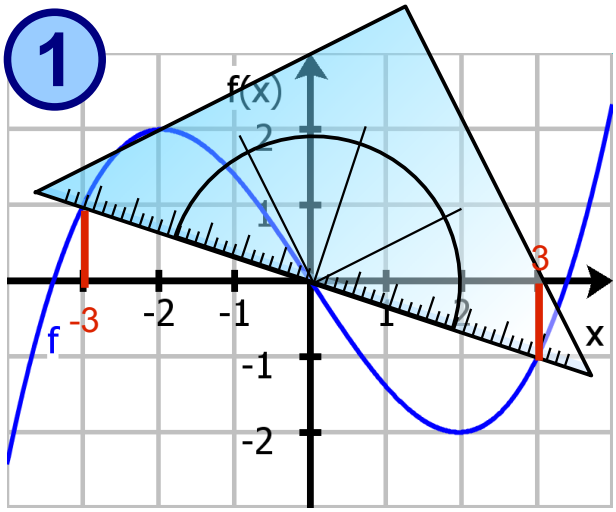
Wertetabelle

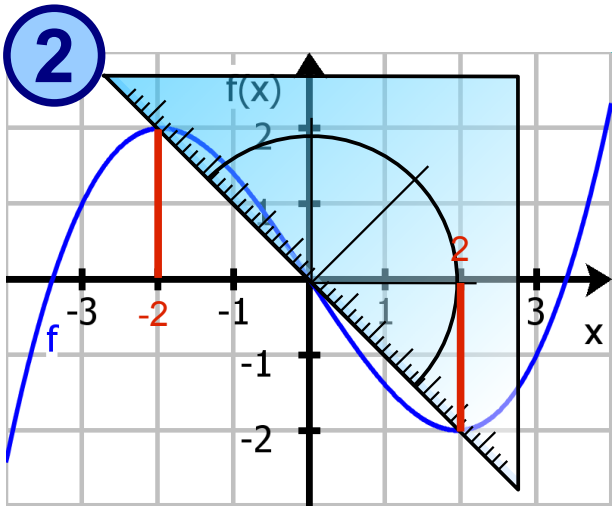
x	$f(x)$
-3	1,0
-2	2,0
-1	1,4
0	0
1	-1,4
2	-2,0
3	-1,0

Schaubild:



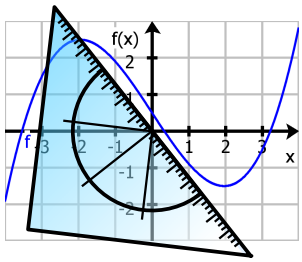
Wir legen eine Gerade durch den Ursprung, so dass sie die Kurve bei $x = -3$ schneidet. Die Gerade schneidet die Kurve dann auch bei $x = 3$ (siehe Schaubild 1). Gleiches gilt auch bei $x = -2$ und $x = 2$ (siehe Schaubild 2) und genauso gilt es bei jeden anderen beliebigen Wert für x.





Diese Eigenschaft wird als **Symmetrie zum Ursprung** bezeichnet (Spiegelung am Ursprung).

Nicht jede Polynomfunktion mit einem ungeraden Grad ist symmetrisch zum Ursprung, wie folgendes Beispiel zeigt:



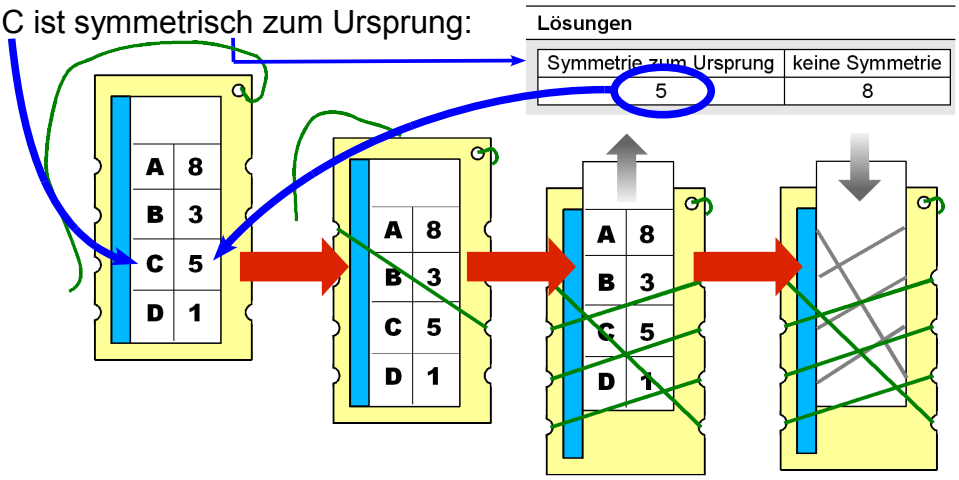
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{2}{15}x^3 - \frac{23}{15}x + \frac{1}{2}$$

© 2008-2012 Henrik Horstmann

Aufgaben

Zeichnen Sie die Kurven zu den unten gegebenen Funktionsgleichungen die Graphen in ein Koordinatensystem[1] ein und stellen Sie fest, ob die Kurven symmetrisch zum Ursprung sind. Prüfen Sie mit dem Bandoline Ihre Ergebnisse wie folgt:

Beispiel: Die Funktion C ist symmetrisch zum Ursprung:



040416E
Henrik´s Kontrolletti

Funktionsgleichungen	Lösungen	
A $f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{6}x$	Symmetrie zum Ursprung	keine Symmetrie
	2	1
B $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x$	Symmetrie zum Ursprung	keine Symmetrie
	2	4
C $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+2x+1$	Symmetrie zum Ursprung	keine Symmetrie
	4	3
D $f(x)=-\frac{5}{24}x^3+\frac{29}{24}x$	Symmetrie zum Ursprung	keine Symmetrie
	1	3

Zusammenfassung

Halten Sie schriftlich fest (und vergleichen Sie mit den Lösungskarten):

1. Wenn $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0$ ($n\in\mathbb{N}^*$, n ist ungerade, $a_n\neq 0$) die Funktionsgleichung ist, wovon hängt es ab, ob die zugehörige Kurve symmetrisch zum Ursprung ist (Betrachten Sie die Beispiele von oben)? Geben Sie eine Regel an.

1. Nehmen wir an, dass die Kurve zur Funktion f symmetrisch zum Ursprung ist.

   a) Welche der folgenden Gleichungen gilt dann (Testen Sie die Gleichungen an den obigen Aufgaben)?

   [1] $f(-x)=f(x)$ [2] $f(-x)=-f(x)$

   b) [*Wenn noch Zeit ist*] Versuchen Sie Ihre Aussage zu begründen (z.B. mit Hilfe eines Schaubilds).

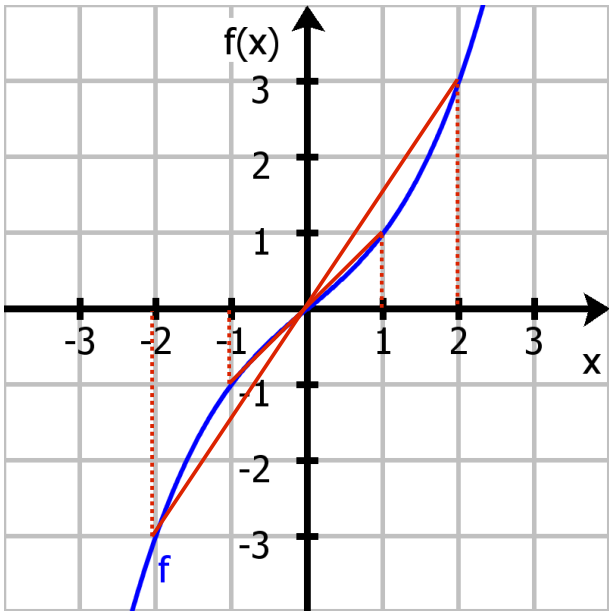
1 Hinweis: Verwenden Sie eine Wertetabelle.

© 2008-2012 Henrik Horstmann

Symmetrie zum Ursprung (Lösungen)

Kurve 1: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x$

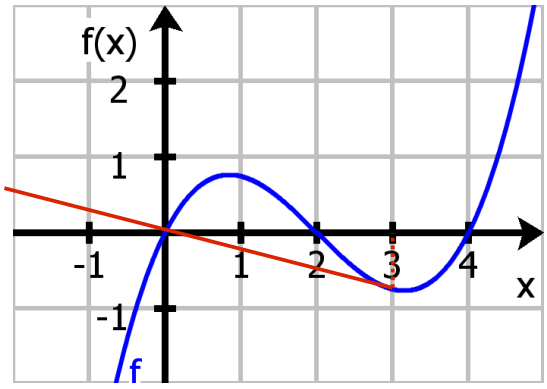
Schaubild:



Antwort: Die Kurve ist symmetrisch zum Ursprung.

Kurve 2: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$

Schaubild:

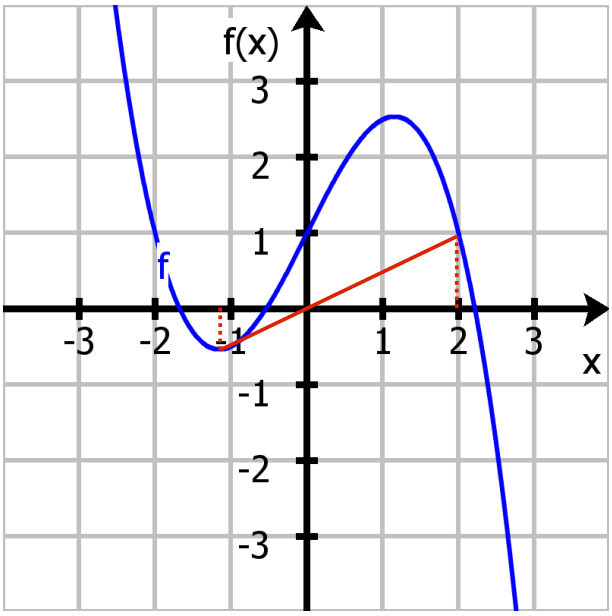


Antwort: Die Kurve ist nicht symmetrisch zum Ursprung.

 © 2008-2012 Henrik Horstmann

Kurve 3: $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x + 1$

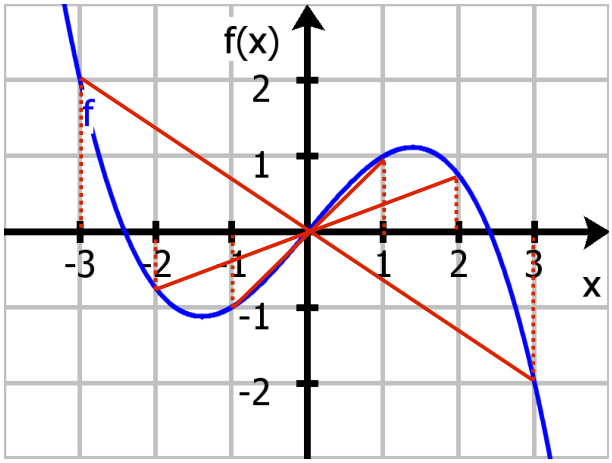
Schaubild



Antwort: Die Kurve ist nicht symmetrisch zum Ursprung.

Kurve 4: $f(x) = -\frac{5}{24}x^3 + \frac{29}{24}x$

Schaubild



Antwort: Die Kurve ist symmetrisch zum Ursprung.

 © 2008-2012 Henrik Horstmann

Zusammenfassung

Halten Sie schriftlich fest (und vergleichen Sie mit den Lösungskarten):

1. Wenn $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ ($n \in \mathbb{N}^*$, n ist ungerade, $a \neq 0$) die Funktionsgleichung ist, wovon hängt es ab, ob die zugehörige Kurve symmetrisch zum Ursprung ist (Betrachten Sie die Beispiele von oben)? Geben Sie eine Regel an.

   Wenn $a_i = 0$ ($0 \leqslant i \leqslant n$, i ist gerade) ist, dann ist die Kurve symmetrisch zum Ursprung.

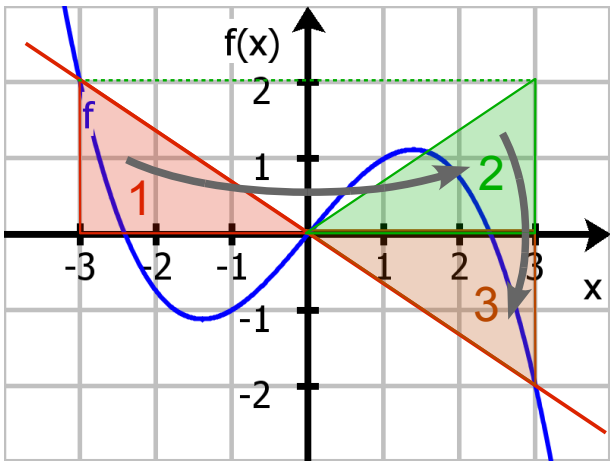
2. Nehmen wir an, dass die Kurve zur Funktion f symmetrisch zum Ursprung ist.

   a) Welche der folgenden Gleichungen gilt dann (Testen Sie die Gleichungen an den obigen Aufgaben)?

   [1] $f(-x) = f(x)$ [2] $f(-x) = -f(x)$

   Es gilt Gleichung [2].

   b) [*Wenn noch Zeit ist*] Versuchen Sie Ihre Aussage zu begründen (z.B. mit Hilfe eines Schaubilds).



Da die Kurve symmetrisch zum Ursprung ist, schneidet eine Gerade, die durch $f(-x)$ und den Ursprung verläuft, die Kurve ein weiteres Mal bei $f(x)$. Zeichnen wir nun ein Steigungsdreieck der Geraden mit den Eckpunkten $\{(-x,0),\ (-x, f(-x)),\ (0,0)\}$ ein (siehe Dreieck 1 im Schaubild). Spiegeln wir dieses Dreieck an der y-Achse, so erhalten wir ein Dreieck mit den Eckpunkten $\{(x,0),\ (x, f(-x)),\ (0,0)\}$. Durch eine weitere Spiegelung an der x-Achse erhalten wir das Dreieck 3 (siehe Schaubild) mit den Eckpunkten $\{(x,0),\ (x, -f(-x)),\ (0,0)\}$. Dies Dreieck ist wiederum Steigungsdreieck unserer Geraden, und damit ist $f(x) = -f(-x)$. Multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit -1, so erhalten wir $f(-x) = -f(x)$, was zu zeigen war.

© 2008-2012 Henrik Horstmann