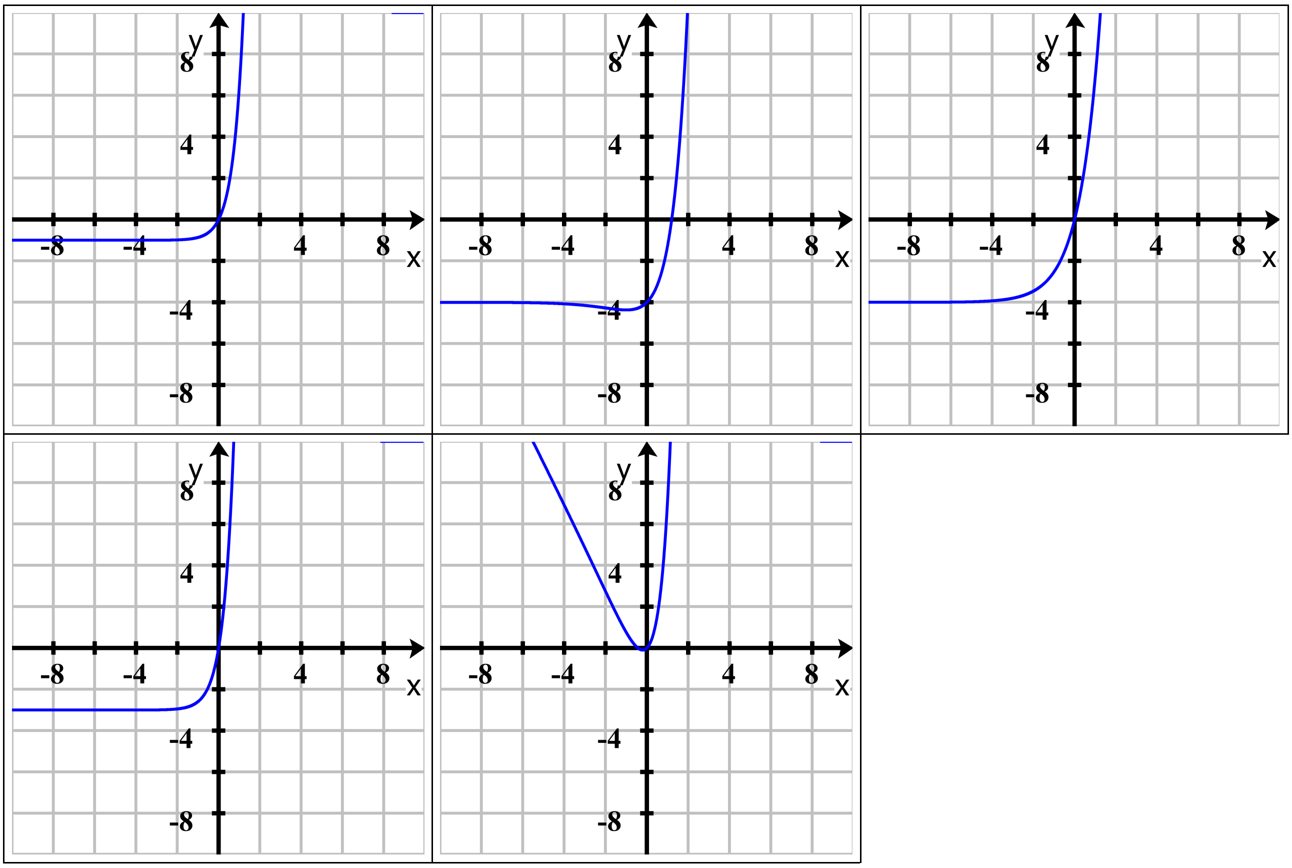
Schnittstellen von e-Funktionen

Die Funktionen

$f(x)=3e^{x}-3$, $h(x)=e^{2x}-1$, $p(x)=4e^{x}-4$, $k(x)=x e^{x}-4$, $t(x)=x e^{x}+e^{2x}-2x-1$, $x \in \mathbb{R}$. Die dazugehörigen Graphen sind K_f. K_h, K_p, K_k und K_t.

Schaubilder



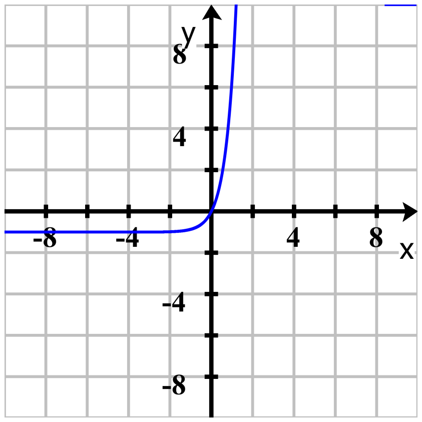
Ordnen Sie die Funktionsgleichungen den Schaubildern zu.

Schnittstellen

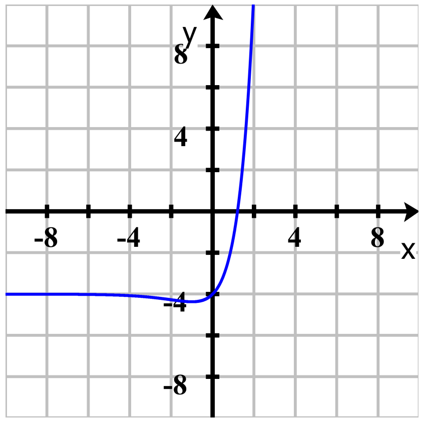
Gesucht sind die Stellen, an denen sich K_f und K_h, K_h und K_t, K_p und K_k, sowie K_h und K_p sich schneiden.

Lösungsvorschläge

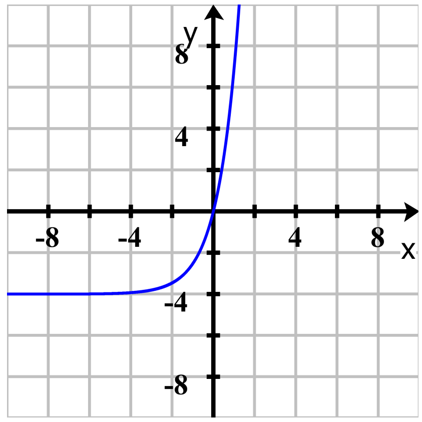
Schaubilder



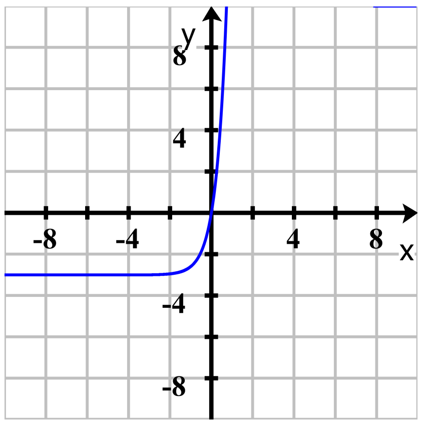
$h(x) = e^{2x} - 1$



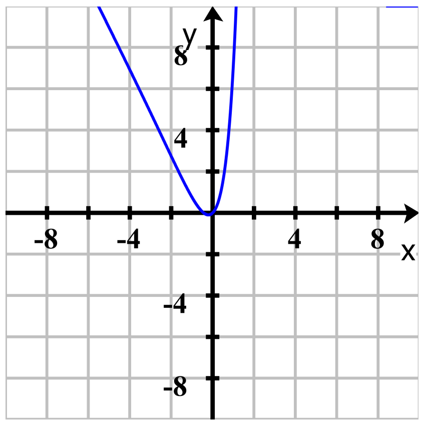
$k(x) = x\,e^{x} - 4$



$p(x) = 4\,e^{x} - 4$



$f(x) = 3\,e^{x} - 3$



$t(x) = x\,e^{x} + e^{2x} - 2x - 1$

Schnittstellen

von K_f und K_h:

Setze $f(x) = h(x)$:

$$\begin{aligned} 3e^{2x} - 3 &= e^{2x} - 1 && \left| -e^{2x} + 3 \right. \\ 2e^{2x} &= 2 && \left| \div 2 \right. \\ e^{2x} &= 1 && \left| \ln \right. \\ 2x &= 0 && \left| \div 2 \right. \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Lösen durch logarithmieren.

von K_h und K_t:

Setze $h(x)=t(x)$:

$$\begin{aligned} e^{2x}-1 &= x e^x + e^{2x} - 2x - 1 && \big| -x e^x - e^{2x} + 2x + 1 \\ x e^x - 2x &= 0 && \big| x \text{ ausklammern} \\ x\left(e^x - 2\right) &= 0 \end{aligned}$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist $x=0$ oder $e^x-2=0 \;\Leftrightarrow\; x=\ln(2)$.

Lösen durch ausklammern.

von K_p und K_k:

Setze $p(x)=k(x)$:

$$\begin{aligned} 4e^x - 4 &= x e^x - 4 && \big| -x e^x + 4 \\ 4e^x - x e^x &= 0 && \big| e^x \text{ ausklammern} \\ e^x(4-x) &= 0 \end{aligned}$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt $4-x=0 \;\Leftrightarrow\; x=4$.

Lösen durch ausklammern.

von K_h und K_p:

Setze $h(x)=p(x)$:

$$e^{2x}-1 = 4e^x-4 \quad \Big| -4e^x+4$$
$$e^{2x}-4e^x+3 = 0 \quad \Big| +4$$
$$e^{2x}-1 = 4e^x-4 \quad \Big| -4e^x+4$$
$$e^{2x}-4e^x+3 = 0 \quad \Big| +4$$
$$e^{2(x)}-4e^x+3 = 0$$
$$\left(e^{(x)}\right)^2-4e^x+3 = 0 \quad \Big| \text{ Substituton: } e^x \rightarrow u$$
$$u^2-4u+3 = 0$$

mit $a=1$, $b=-4$ und $c=3$ in die Lösungsformel einsetzen:

$$u_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}$$
$$u_{1,2} = \frac{4\pm 2}{2}$$
$$u_1 = 3$$
$$u_2 = 1$$

Rücksubstituton: $u \rightarrow e^x$

u_1: $e^x = 3$

$$e^x = 3 \quad \Big| \ln$$
$$x = \ln(3)$$
$$x \approx 1{,}0986$$
$$x_1 = \ln(3)$$

u_2: $e^x = 1$

$$e^x = 1 \quad \Big| \ln$$
$$x = \ln(1)$$
$$x = 0$$
$$x_2 = 0$$

Lösen durch Substitution.