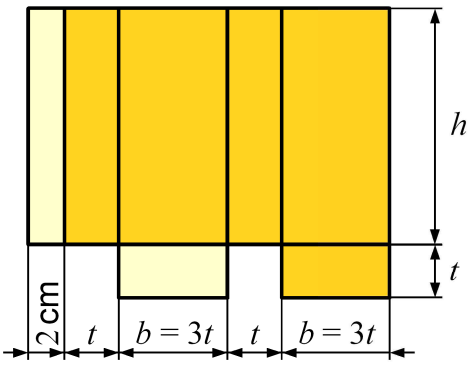
Optimieren

Beispiel: Tüte

Sachverhalt



Ein Papierhersteller soll für eine Bäckereikette Papiertüten herstellen. Die Tüten sollen dreimal so breit wie tief sein und ein Volumen von $7047\,\text{cm}^3$ haben.

Daraus ergeben sich die Nebenbedingungen $b = 3t$, und $7047 = t \cdot b \cdot h$.

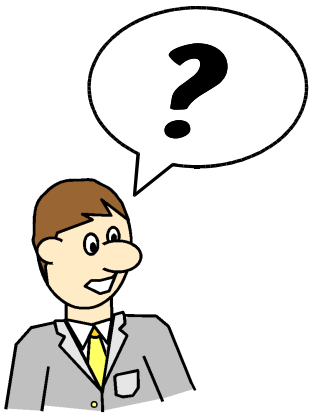
Die Größe der Oberfläche wird durch den Term $O = (2+2t+2b) \cdot h+2bt$ beschrieben.

Aufgabe an den Papierhersteller

Wie tief muss die Tüte sein, dass die Größe der Oberfläche minimal ist. Dazu muss der Ingenieur als erstes eine Zielfunktion bestimmen:

Helfen Sie dem Ingenieur die Zielfunktion mit Hilfe des Tipp zu finden.

(Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen auf der Lösungskarte 1)



Nun sucht der Ingenieur nach einem t, für das $O(t)$ minimal wird, also einen Tiefpunkt besitzt. Leider hat er seinen grafischen Taschenrechner verlegt.

Finden Sie mit Hilfe des grafischen Taschenrechners das absolute Minimum der Zielfunktion für $0<t$ heraus.

(Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen auf der Lösungskarte 2)

© 2009 Henrik Horstmann

Optimieren

Beispiel: Tüte

Lösungskarte 1

Funktion bilden:

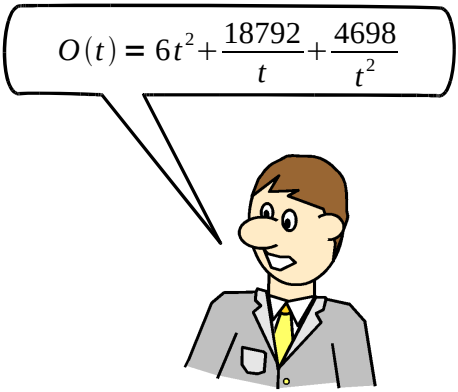
$$O(t) = (2+2t+2b)\cdot h+2bt$$

Funktion nach einer Variablen auflösen:

$$b = 3t \text{ und } h = \frac{2349}{t^2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} O(t) &= (2+2t+2b)\cdot h+2bt \\ &= (2+8t)\cdot\frac{2349}{t^2}+2\cdot 3t\cdot t \\ &= \frac{4698}{t^2}+\frac{18792}{t}+6t^2 \\ &= 6t^2+\frac{18792}{t}+\frac{4698}{t^2} \end{aligned}$$

Zielfunktion ist somit:



 © 2009 Henrik Horstmann

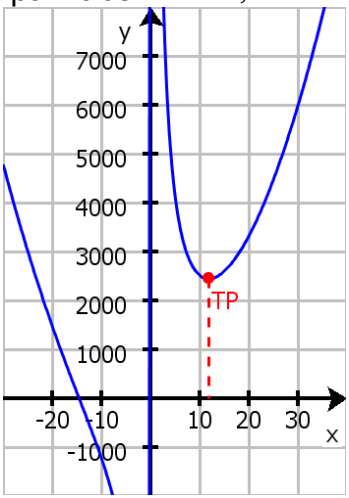
Optimieren

Beispiel: Tüte

Lösungskarte 2

Extrema bestimmen:

Mit dem GTR: Tiefpunkt bei $t = 11{,}77$



Da $t = 11{,}77$ der einzige Tiefpunkt für $0 < t$ ist, hat $O(t)$ an der Stelle $t = 11{,}77$ sein absolutes Minimum im relevanten Definitionsbereich.

 © 2009 Henrik Horstmann