Faktor- und Summenregel

Faktorregel

Gegeben ist die Funktion $f(x)=3\,p(x)$ mit $p(x)=x^2$.
Gesucht ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$.
Bilde zunächst den Differenzenquotienten und suche dann nach dem Grenzwert:

1. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{3\,p(x)-3\,p(x_0)}{x-x_0}=\frac{3x^2-3x_0^2}{x-x_0}=\frac{3(x^2-x_0^2)}{x-x_0}=\frac{3(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0}=3(x+x_0)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} 3(x+x_0)=3\cdot\underbrace{2x_0}_{=p'(x)}$

Damit ist $f'(x)=3\,p'(x)$.

Das Ergebnis lässt sich zur Faktorregel verallgemeinern:

$$\boxed{f(x)=a\,p(x)\quad\Rightarrow\quad f'(x)=a\,p'(x)\qquad (a\in\mathbb{R})}$$

Beispiele:

a) $f(x)=4x^3$ $\qquad f'(x)=12x^2$

b) $f(x)=-2x^8$ $\qquad f'(x)=-16x^7$

c) $f(x)=7x\quad(=7x^1)$ $\qquad f'(x)=7$

d) $f(x)=7\quad(=7x^0)$ $\qquad f(x)=0$

Summenregel

Gegeben ist die Potenzfunktion $f(x)=p(x)+g(x)$ mit $p(x)=x^2$ und $g(x)=x$.
Gesucht ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$.
Bilde zunächst den Differenzenquotienten und suche dann nach dem Grenzwert:

1. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{p(x)+g(x)-\left(p(x_0)+g(x_0)\right)}{x-x_0}=\frac{p(x)-p(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$
$=\frac{x^2-x_0^2+x-x_0}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x+x_0)+(x-x_0)}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)\left((x+x_0)+1\right)}{x-x_0}=x+x_0+1$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} x+x_0+1=\underbrace{2x_0}_{=p'(x)}+\underbrace{1}_{=g'(x)}$

Das Ergebnis lässt sich zur Summenregel verallgemeinern:

$$\boxed{f(x)=p(x)+g(x)\quad\Rightarrow\quad f'(x)=p'(x)+g'(x)}$$

Beispiele:

a) $f(x)=x^3+x^2$ $\qquad f'(x)=3x^2+2x$

b) $f(x)=x^7+x^4$ $\qquad f'(x)=7x^6+4x^3$

c) $f(x)=x^5+x^3+x^2$ $\qquad f'(x)=5x^4+3x^2+2x$

d) $f(x)=x^4+x^3+x$ $\qquad f'(x)=4x^3+3x^2+1$