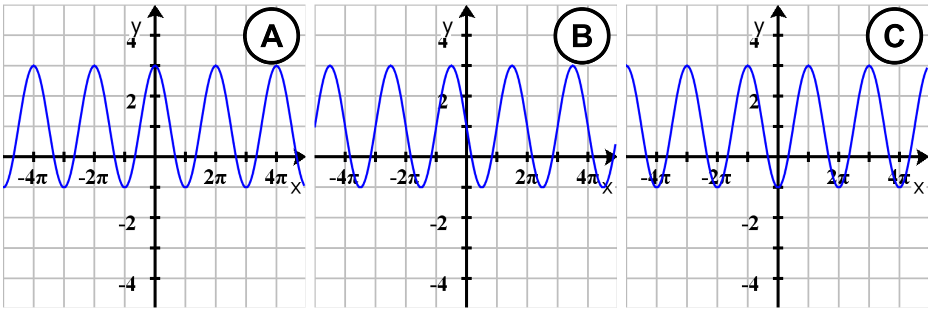
Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen

Schaubilder

a) Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x)=-2\cos(x)+1$, $x\in\mathbb{R}$.

1.



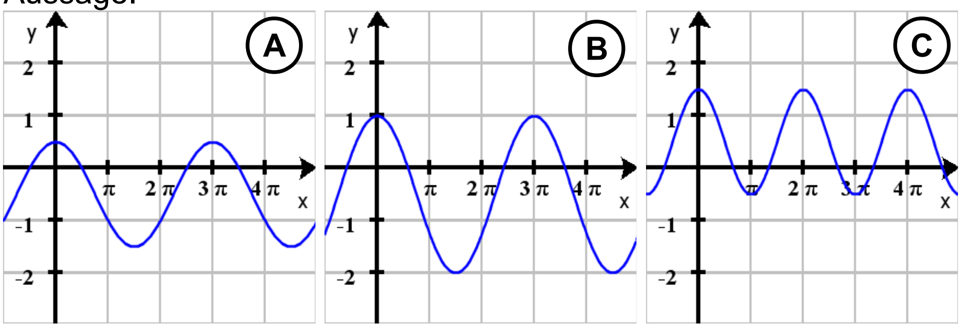
Es ist bekannt, dass zwei der dargestellten Kurven A, B und C nicht Schaubild von f sein können. Welche sind dies? Begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie zu jedem nicht zutreffenden Schaubild eine Eigenschaft nennen, die nicht mit den Funktionseigenschaften von f vereinbar ist.

2. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von h_1, h_2 und h_3 unter den folgenden Bedingungen. K_{h_i} Ist der Graph von h_i $(i\in\{1,2,3\})$.

   - h_1 soll aus f durch vertikales Verschieben von K_f hervorgehen, so dass K_{h_1} durch den Punkt $P(\pi\,|\,2)$ verläuft.
   - h_2 soll aus f durch Veränderung der Amplitude hervorgehen, so dass K_{h_2} durch den Punkt $P(\pi\,|\,2)$ verläuft.
   - h_3 soll aus f durch Veränderung der Periode hervorgehen, so dass K_{h_3} durch den Punkt $Q(\pi\,|\,1)$ verläuft.

b) Sei K_f das Schaubild der Funktion f mit $f(x)=\cos\left(\frac{2}{3}x\right)+b$.

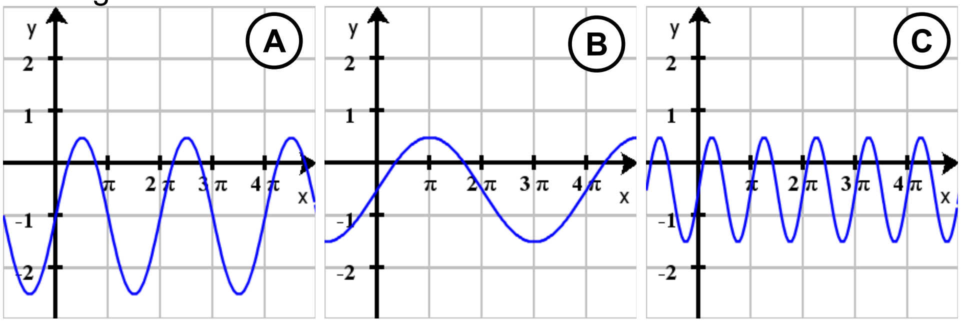
1. Welche der zwei folgenden Schaubilder gehören nicht zu K_f. Begründen Sie Ihre Aussage.



2. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung zu dem Graphen aus Schaubild B.

c) Sei K_f das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + b$.

1. Welche der zwei folgenden Schaubilder gehören nicht zu K_f. Begründen Sie Ihre Aussage.



2. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung zu dem Graphen aus Schaubild A.

d) K_f Ist der Graph von $f(x) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 1\right)$, $x \in [-\pi; 5\pi]$.

1. Skizzieren Sie K_f in einem geeigneten Koordinatensystem.
2. Bestimmen Sie die Perioden von K_f .
3. Bestimmen Sie die Schnittpunkte von K_f mit den Koordinatenachsen (berücksichtigen Sie dabei den Definitionsbereich).

Gleichungen

a) Bestimmen Sie in den folgenden Gleichungen den exakten Wert für x .

1. $\sin\left(\frac{2}{9}\pi\right) = \sin(x\pi); \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \; x \neq \frac{2}{9}$
2. $\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \cos(x\pi); \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$
3. $\cos\left(\frac{2}{9}\pi\right) = \cos(x\pi); \quad 0 \leqslant x \leqslant 2; \; x \neq \frac{2}{9}$
4. $\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin(x\pi); \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$

b) Sei f eine Funktion mit $f(x) = 0{,}5\cos(x) + 1$.

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = 1{,}5$ zwei Lösungen für $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ besitzt.
2. Sei K_f der Graph von f. Begründen Sie, warum K_f keine Nullstellen besitzt.

c) Sei f eine Funktion mit $f(x) = 1{,}5\sin(x) + 2$.

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = 3{,}5$ zwei Lösungen für $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ besitzt.
2. Sei K_f der Graph von f. Zeigen Sie, dass K_f nur oberhalb der x-Achse verläuft.

Lösungen

Funktionsgraphen

a)

1. A gehört nicht zu f, da das Schaubild eine Spiegelung von K_f an der x-Achse ist.

   B gehört nicht zu f, da das Schaubild K_f mit einer horizontalen Verschiebung zeigt.

2. h_1: $h_1(x)=-2\cos(x)+b$ Bestimme b:
   $2=h_1(\pi)=-2\cos(\pi)+b=2+b \;\Rightarrow\; b=0 \;\Rightarrow\; h_1(x)=-2\cos(x)$

   h_2: $h_2(x)=a\cos(x)+1$ Bestimme a:
   $2=h_2(\pi)=a\cos(\pi)+1=-a+1 \;\Rightarrow\; a=-1 \;\Rightarrow\; h_2(x)=-\cos(x)+1$

   h_3: $h_3(x)=-2\cos(kx)+1$ Bestimme k:
   $1=h_3(\pi)=-2\cos(k\pi)+1 \;\Rightarrow\; \cos(k\pi)=0 \;\Rightarrow\; k=\frac{1}{2}$
   $h_3(x)=-2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+1$

b)

1. Schaubild B gehört nicht zu K_f, da die Amplitude des Graphen in Schaubild B $a=\frac{3}{2}$ ist.
   Schaubild C gehört ebenfalls nicht zu K_f, da die Periode des in C dargestellten Graphen die Länge 2π hat. K_f Hat jedoch eine Periode von 3π.

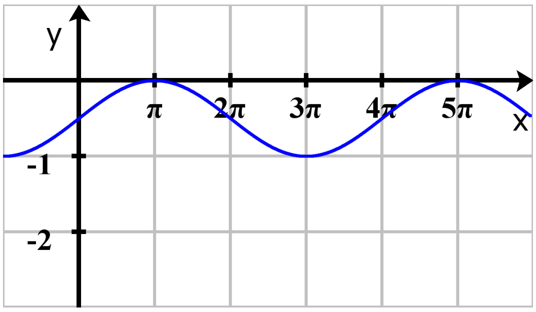
2. $f(x)=\frac{3}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x\right)-\frac{1}{2}$

c)

1. Schaubild A gehört nicht zu K_f, da die Amplitude des Graphen in Schaubild A $a=\frac{3}{2}$ ist.
   Schaubild C gehört ebenfalls nicht zu K_f, da die Periode des in C dargestellten Graphen die Länge π hat. K_f Hat jedoch eine Periode von 4π.

2. $f(x)=\frac{3}{2}\sin(x)-1$

d)

1. 

2. Die Periode $p = 4\pi$.

3. Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = \frac{1}{2}(\sin(0) - 1) = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 1\right) &= 0 \quad | \cdot 2 \\ \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 1 &= 0 \quad | +1 \\ \sin\left(\frac{1}{2}x\right) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2}x &= \frac{1}{2}\pi \quad | \cdot 2 \\ x &= \pi \end{aligned}$$

Mit der Periode und dem Definitionsbereich ergibt sich:

$N_1(\pi \mid 0)$ und $N_2(5\pi \mid 0)$ sind einzige Nullstelle von K_f .

Gleichungen

a)

1. $x = \frac{7}{9}$

2. $x = \frac{1}{3}$

3. $x = \frac{16}{9}$

4. $x = \frac{7}{6}$

b)

1. $$\begin{aligned} 0{,}5\cos(x) + 1 &= 1{,}5 \quad | -1 \\ 0{,}5\cos(x) &= 0{,}5 \quad | \div 0{,}5 \\ \cos(x) &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = 2\pi$

2. Setze $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 0{,}5\cos(x)+1 &= 0 & &\mid -1 \\ 0{,}5\cos(x) &= -1 & &\mid \div 0{,}5 \\ \cos(x) &= -2 \end{aligned}$$

Es ist aber $-1 \leqslant \cos(x)$ für alle x.

c)

1.
$$\begin{aligned} 1{,}5\sin(x)+2 &= 3{,}5 & &\mid -2 \\ 1{,}5\sin(x) &= 1{,}5 & &\mid \div 1{,}5 \\ \sin(x) &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \; x_1 = \frac{1}{2}\pi, \;\; x_2 = \frac{3}{2}\pi$

2. Setze $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 1{,}5\sin(x)+2 &= 0 & &\mid -2 \\ 1{,}5\sin(x) &= -2 & &\mid \div 1{,}5 \\ \sin(x) &= -1{,}\overline{3} \end{aligned}$$

Es ist aber $-1 \leqslant \sin(x)$ für alle x und somit besitzt K_f keine Nullstellen. Da K_f nach oben verschoben ist, muss sie oberhalb der x-Achse verlaufen.