

Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass sich die Kurven K_f und K_h der Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + \sin(x) - 1 \\ h(x) &= -e^{-4x} \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 0$ berühren.



Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass sich die Kurven K_f und K_h der Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) + 2x \\ h(x) &= e^{2x} \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 0$ berühren.



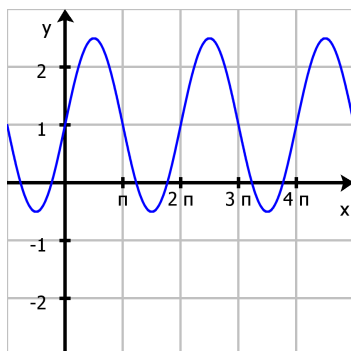
Aufgabe 3

Sei K das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \cos\left(\frac{3}{2}x\right) - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die exakten Nullstellen von K für $-\pi \leq x \leq 4\pi$.

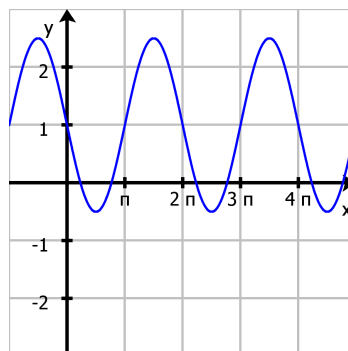


Aufgabe 4

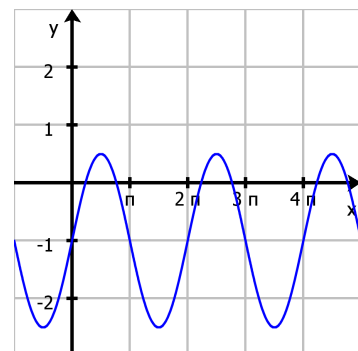
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{3}{2}\sin(x) + 1$.



A



B



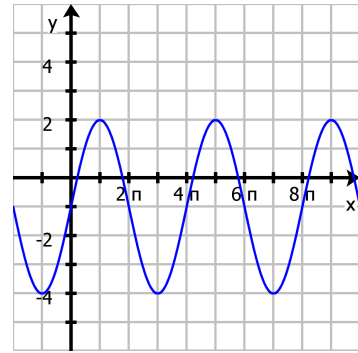
C

- Es ist bekannt, dass zwei der dargestellten Kurven A, B und C nicht Schaubild von f sein können. Welche sind dies? Begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie zu jedem nicht zutreffenden Schaubild eine Eigenschaft nennen, die nicht mit den Funktionseigenschaften von f vereinbar ist.
- Ändern Sie die Funktionsgleichung von f ab, so dass sich die Periode von f halbiert.

Aufgabe 5

Das nebenstehende Schaubild hat die Funktionsgleichung: $f(x) = a \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + b$, $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie a und b .



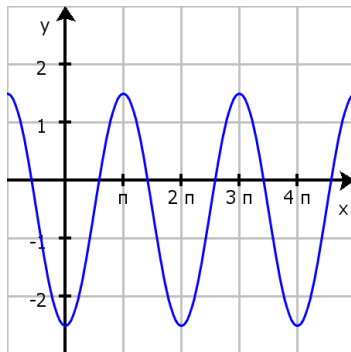
Aufgabe 6

Sei K das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die exakten Nullstellen von K für $-\pi \leq x \leq 2\pi$.

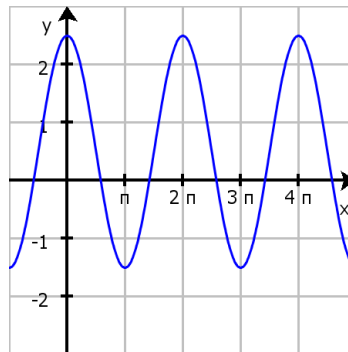


Aufgabe 7

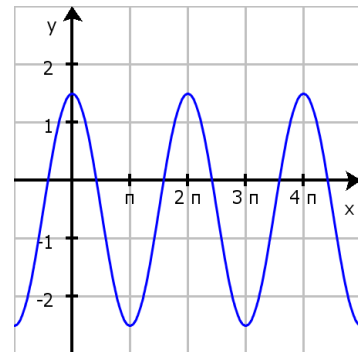
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cos(x) - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.



A



B



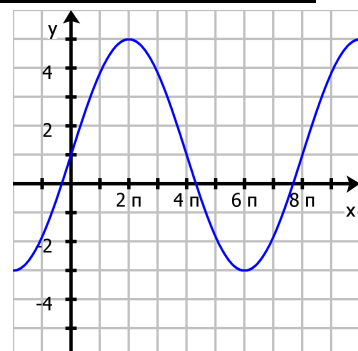
C

- Es ist bekannt, dass zwei der dargestellten Kurven A, B und C nicht Schaubild von f sein können. Welche sind dies? Begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie zu jedem nicht zutreffenden Schaubild eine Eigenschaft nennen, nicht mit den Funktionseigenschaften von f vereinbar ist.
- Ändern Sie die Funktionsgleichung von f ab, so dass sich die Periode von f verdoppelt.

Aufgabe 8

Das nebenstehende Schaubild hat die Funktionsgleichung: $f(x) = a \sin\left(\frac{1}{4}x\right) + b$, $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie a und b .



Aufgabe 9

Bestimmen Sie für folgende Gleichung den exakten Wert für x .

$$\sin\left(\frac{2}{9}\pi\right) = \sin(x\pi); \quad 0 \leq x \leq 1; \quad x \neq \frac{2}{9}$$



Aufgabe 10

Bestimmen Sie für folgende Gleichung den exakten Wert für x .

$$\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = \cos(x\pi); \quad 0 \leq x \leq 1$$

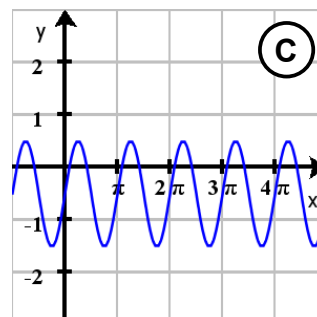
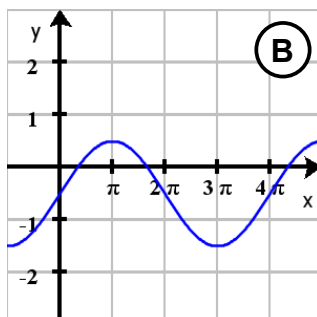
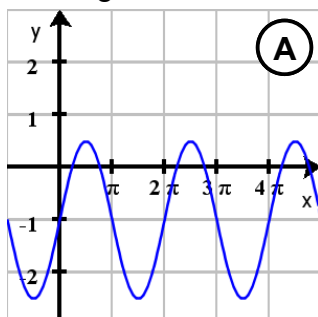


Aufgabe 11

Sei K_f das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + b$, $x \in \mathbb{R}$.



1. Welche der zwei folgenden Schaubilder gehören nicht zu K_f . Begründen Sie Ihre Aussage.



2. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung zu dem Graphen aus Schaubild A.

Aufgabe 12

Sei f eine Funktion mit $f(x) = 0,5 \cos(x) + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = 1,5$ zwei Lösungen für $0 \leq x \leq 2\pi$ besitzt.
2. Sei K_f der Graph von f . Begründen Sie, warum K_f keine Nullstellen besitzt.



Aufgabe 13

Bestimmen Sie für folgende Gleichung den exakten Wert für x .

$$\cos\left(\frac{2}{9}\pi\right) = \cos(x\pi); \quad 0 \leq x \leq 2; \quad x \neq \frac{2}{9}$$



Aufgabe 14

Bestimmen Sie für folgende Gleichung den exakten Wert für x .

$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin(x\pi); \quad 0 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

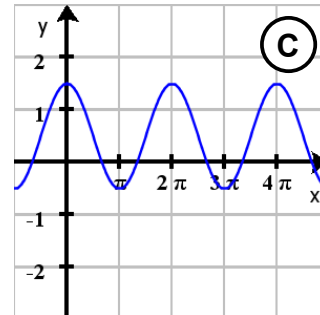
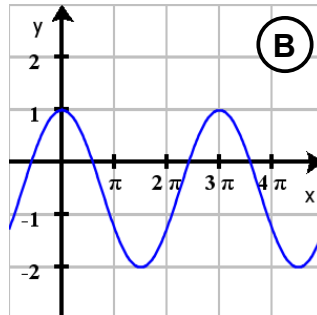
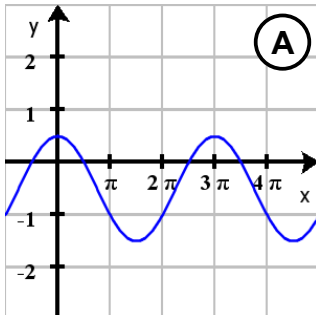


Aufgabe 15

Sei K_f das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \cos\left(\frac{2}{3}x\right) + b$, $x \in \mathbb{R}$.



- Welche der zwei folgenden Schaubilder gehören nicht zu K_f . Begründen Sie Ihre Aussage.



- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung zu dem Graphen aus Schaubild B.

Aufgabe 16

Sei f eine Funktion mit $f(x) = 1,5 \sin(x) + 2$, $x \in \mathbb{R}$.



- Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x) = 3,5$ zwei Lösungen für $0 \leq x \leq 2\pi$ besitzt.
- Sei K_f der Graph von f . Zeigen Sie, dass K_f nur oberhalb der x -Achse verläuft.

Aufgabe 17

Für jedes $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Funktion f_t durch

$$f_t(x) = \frac{t}{4} \left(\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 1 \right), \quad x \in [-\pi; 5\pi]$$



gegeben. Das Schaubild von f_t ist gegeben durch K_t .

- Skizzieren Sie K_2 in einem geeigneten Koordinatensystem.
- Bestimmen Sie die Perioden von K_t .
- Bestimmen Sie die Schnittpunkte von K_2 mit den Koordinatenachsen.
- Bestimmen Sie t , so dass K_t an der Stelle $x = 2\pi$ die Steigung $m = -\frac{1}{2}$ hat.

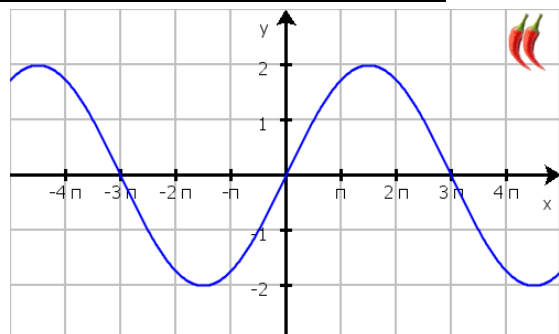
Aufgabe 18

Die Abbildung zeigt den Graphen K einer Funktion f .

- Bestimmen Sie grafisch: $f'(3\pi)$
- Folgende Aussagen sind falsch und wahr:

$$f'(-3\pi) = 0, \quad f'(0) = -1, \quad f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$$

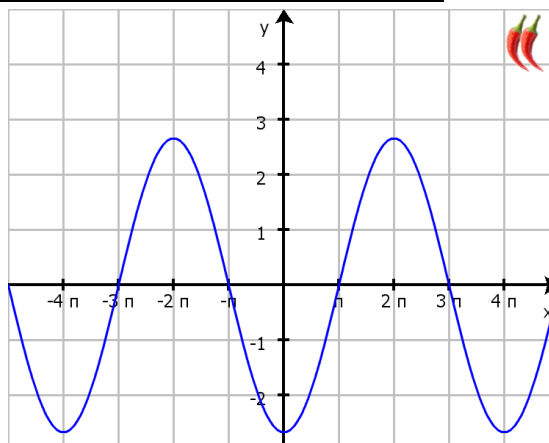
Entscheiden Sie und Begründen Sie ihre Entscheidung.



Aufgabe 19

Die Abbildung zeigt den Graphen K einer Funktion f .

- Bestimmen Sie grafisch: $f'(-\pi)$
- Folgende Aussagen sind falsch und wahr:
 $f'(-2\pi) = 0$, $f'(0) = 0$, $f'(\pi) = 3$
 Entscheiden Sie und Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Lösungen

zu Aufgabe 3: $N_1(0 | 0)$, $N_2\left(\frac{4}{3}\pi | 0\right)$, $N_3\left(\frac{8}{3}\pi | 0\right)$, $N_4(4\pi | 0)$

zu Aufgabe 4: A und C, $f(x) = -\frac{3}{2}\sin(2x) + 1$

zu Aufgabe 5: $a=3$, $b=-1$

zu Aufgabe 6: $N_1(-\pi | 0)$, $N_2(0 | 0)$, $N_3(\pi | 0)$, $N_4(2\pi | 0)$

zu Aufgabe 7: A und B, $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2}$

zu Aufgabe 8: $a=4$, $b=1$

zu Aufgabe 9: $x = \frac{7}{9}$

zu Aufgabe 10: $x = \frac{1}{3}$

zu Aufgabe 11: A und C, $f(x) = \frac{3}{2}\sin(x) - 1$

zu Aufgabe 13: $x = \frac{16}{9}$

zu Aufgabe 14: $x = \frac{7}{6}$

zu Aufgabe 15: B und C, $f(x) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{2}$

zu Aufgabe 17: $p=4\pi$, $S_y\left(0\left|\frac{1}{2}\right.\right)$, $N_1(\pi | 0)$ und $N_2(5\pi | 0)$, $t=4$

zu Aufgabe 18: $f'(3\pi) = -\frac{2}{3}$, $f'(-3\pi) = 0$ ist falsch, $f'(0) = -1$ ist falsch,
 $f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$ ist wahr.

Zu Aufgabe 19: $f'(-\pi) = -\frac{4}{3}$, $f'(-2\pi) = 0$ ist wahr, $f'(0) = 0$ ist wahr,
 $f'(\pi) = -3$ ist falsch

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1

Es ist zu Zeigen, dass die Funktionswerte von $f(x)$ und $h(x)$ an der Stelle x_0 gleich sind und beide Funktionen an der Stelle x_0 die gleiche Steigung besitzen:

$$1. f(0) = 3 \cdot 0 + \sin(0) - 1 = -1$$

$$f(0) = -e^{-4 \cdot 0} = -1$$

$$2. f(x) = 3x + \sin(x) - 1 \Rightarrow f'(x) = \cos(x) + 3 \Rightarrow f'(0) = 1 + 3 = 4$$

$$f(x) = -e^{-4x} \Rightarrow f'(x) = 4e^{-4x} \Rightarrow f'(0) = 4e^{-4 \cdot 0} = 4$$

Aus 1. und 2. folgt, dass sich K_f und K_h an der Stelle $x_0 = 0$ berühren.

Lösung zu Aufgabe 2

Es ist zu Zeigen, dass die Funktionswerte von $f(x)$ und $h(x)$ an der Stelle x_0 gleich sind und beide Funktionen an der Stelle x_0 die gleiche Steigung besitzen:

$$1. f(0) = \cos(0) + 2 \cdot 0 = 1$$

$$f(0) = e^{2 \cdot 0} = 1$$

$$2. f(x) = \cos(x) + 2x \Rightarrow f'(x) = -\sin(x) + 2 \Rightarrow f'(0) = 0 + 2 = 2$$

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow f'(0) = 2e^{2 \cdot 0} = 2$$

Aus 1. und 2. folgt, dass sich K_f und K_h an der Stelle $x_0 = 0$ berühren.

Lösung zu Aufgabe 3

Setze $f(x) = 0$:

$$\cos\left(\frac{3}{2}x\right) - 1 = 0 \quad | +1$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}x\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x = 2n\pi \quad \text{für ein beliebiges } n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4}{3}n\pi$$

$$\Rightarrow x \in \left\{0, \frac{4}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, 4\pi\right\}$$

Nullstellen: $N_1(0 \mid 0)$, $N_2\left(\frac{4}{3}\pi \mid 0\right)$, $N_3\left(\frac{8}{3}\pi \mid 0\right)$, $N_4(4\pi \mid 0)$

Lösung zu Aufgabe 4

1. A kann nicht das Schaubild von f sein, da durch das negative Vorzeichen die Kurve im Schnittpunkt mit der y-Achse eine negative Steigung haben muss.

C kann nicht das Schaubild von f sein, da die Kurve in C um eine Einheit nach unten verschoben ist. Das Schaubild von f ist jedoch nach oben verschoben.

$$2. f(x) = -\frac{3}{2}\sin(2x) + 1$$

Lösung zu Aufgabe 5

$$a=3, b=-1$$

Lösung zu Aufgabe 6

Setze $f(x) = 0$:

$$\frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{2} = 0 \quad \left| +\frac{1}{2} \right.$$

$$\frac{1}{2} \cos(2x) = \frac{1}{2} \quad \left| \div \frac{1}{2} \right.$$

$$\cos(2x) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x = 2n\pi \quad \text{für ein beliebiges } n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = n\pi$$

$$\Rightarrow x \in \{-\pi, 0, \pi, 2\pi\}$$

Nullstellen: $N_1(-\pi \mid 0)$, $N_2(0 \mid 0)$, $N_3(\pi \mid 0)$, $N_4(2\pi \mid 0)$

Lösung zu Aufgabe 7

1. A kann nicht das Schaubild von f sein, da durch das positive Vorzeichen die Kurve rechts von der y-Achse eine fallen muss.

B kann nicht das Schaubild von f sein, da die Kurve in B um eine halbe Einheit nach oben verschoben ist. Das Schaubild von f ist jedoch nach unten verschoben ist.

$$2. f(x) = 2 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2}$$

Lösung zu Aufgabe 8

$$a=4, b=1$$

Lösung zu Aufgabe 9

$$x = \frac{7}{9}$$

Lösung zu Aufgabe 10

$$x = \frac{1}{3}$$

Lösung zu Aufgabe 11

1. Schaubild A gehört nicht zu K_f , da die Amplitude des Graphen in Schaubild A $a = \frac{3}{2}$ ist.

Schaubild C gehört ebenfalls nicht zu K_f , da die Periode des in C dargestellten Graphen die Länge π hat. K_f hat jedoch eine Periode von 4π .

$$2. f(x) = \frac{3}{2} \sin(x) - 1$$

Lösung zu Aufgabe 12

$$\begin{aligned} 1. \quad 0,5 \cos(x) + 1 &= 1,5 & | -1 \\ 0,5 \cos(x) &= 0,5 & | \div 0,5 \\ \cos(x) &= 1 \\ \Rightarrow x_1 &= 0, \quad x_2 = 2\pi \end{aligned}$$

2. Setze $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 0,5 \cos(x) + 1 &= 0 & | -1 \\ 0,5 \cos(x) &= -1 & | \div 0,5 \\ \cos(x) &= -2 \end{aligned}$$

Es ist aber $-1 \leq \cos(x)$ für alle x .

Lösung zu Aufgabe 13

$$x = \frac{16}{9}$$

Lösung zu Aufgabe 14

$$x = \frac{7}{6}$$

Lösung zu Aufgabe 15

1. Schaubild B gehört nicht zu K_f , da die Amplitude des Graphen in Schaubild B $a = \frac{3}{2}$ ist.

Schaubild C gehört ebenfalls nicht zu K_f , da die Periode des in C dargestellten Graphen die Länge 2π hat. K_f hat jedoch eine Periode von 3π .

$$2. \quad f(x) = \frac{3}{2} \cos\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{2}$$

Lösung zu Aufgabe 16

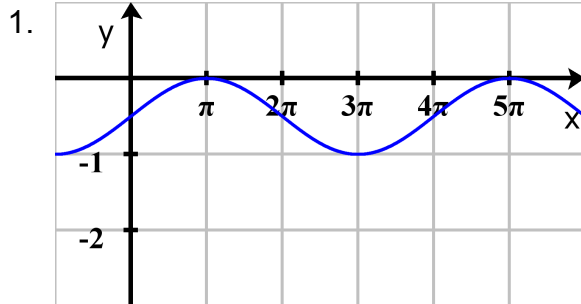
$$\begin{aligned} 1. \quad 1,5 \sin(x) + 2 &= 3,5 & | -2 \\ 1,5 \sin(x) &= 1,5 & | \div 1,5 \\ \sin(x) &= 1 \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{1}{2}\pi, \quad x_2 = \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

2. Setze $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 1,5 \sin(x) + 2 &= 0 & | -2 \\ 1,5 \sin(x) &= -2 & | \div 1,5 \\ \sin(x) &= -1,3 \end{aligned}$$

Es ist aber $-1 \leq \sin(x)$ für alle x und somit besitzt K_f keine Nullstellen. Da K_f nach oben verschoben ist, muss sie oberhalb der x -Achse verlaufen.

Lösung zu Aufgabe 17



2. Die Periode ist $p=4\pi$ (sie ist unabhängig von t).

3. Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f_2(0) = \frac{1}{2}(\sin(0) - 1) = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$f_2(x) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 1\right) = 0 \quad | \cdot 2$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 1 = 0 \quad | +1$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi \quad | \cdot 2$$

$$x = \pi$$

Mit der Periode und dem Definitionsbereich ergibt sich:

$N_1(\pi | 0)$ und $N_2(5\pi | 0)$ sind einzige Nullstelle von K_2 .

4. Bilde die 1. Ableitung: $f_t'(x) = \frac{t}{8} \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

Setze $f_t'(x) = -\frac{1}{2}$:

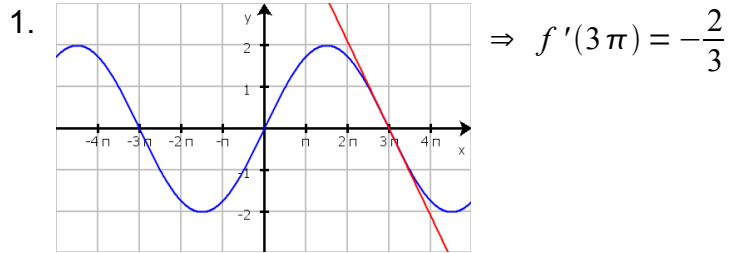
$$\frac{t}{8} \cos(\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{t}{8} = -\frac{1}{2} \quad | \cdot (-8)$$

$$t = 4 \quad | \div \frac{t}{8}$$

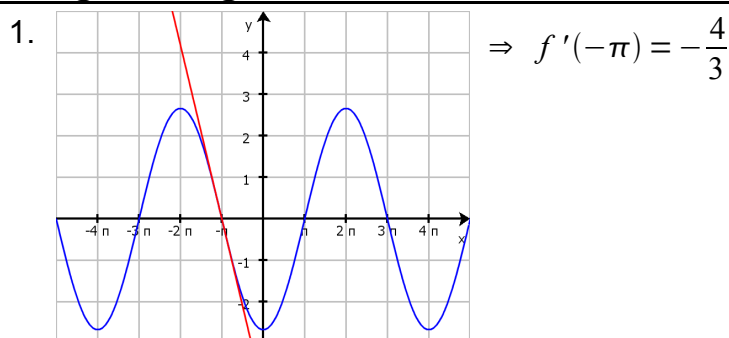
Für $t=4$ hat K_t an der Stelle $x=2\pi$ die Steigung $m = -\frac{1}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 18



2. $f'(-3\pi) = 0$ ist falsch, da K_f an der Stelle $x = -3\pi$ fällt.
 $f'(0) = -1$ ist falsch, da K_f an der Stelle $x = 0$ steigt.
 $f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$ ist wahr, da K_f an der Stelle $x = \frac{3}{2}\pi$ einen Hochpunkt besitzt.

Lösung zu Aufgabe 19



2. $f'(-2\pi) = 0$ ist wahr, denn an der Stelle $x = -2\pi$ hat K eine waagerechte Tangente.
 $f'(0) = 0$ ist wahr, denn an der Stelle $x = 0\pi$ hat K eine waagerechte Tangente.
 $f'(\pi) = -3$ ist falsch, denn an der Stelle $x = \pi$ hat K eine positive Steigung.